Feuille 1

Exercice 1. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Montrer les identités suivantes :

(a) $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\ (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$

(b) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\ (\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Exercice 2. Trouver l'équation du plan $P \subset \mathbb{R}^3$ passant par $A = (1, 2, -1)$ et orthogonal à $\vec{n} = (1, 1, 3)$.

Exercice 3. Trouver l'équation du plan $P \subset \mathbb{R}^3$ passant par les trois points suivants : $(1, -1, 1)$, $(3, 1, 1)$, $(0, 1, -1)$.

Exercice 4. Calculer l'angle entre les vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ dans $\mathbb{R}^n$.

Que se passe-t-il lorsque $n \to \infty$?

Exercice 5. Donner les coordonnées polaires des points de coordonnées cartésiennes suivantes : $(1, 1)$, $(-1, 0)$, $(1, 3)$, $(2, -3)$, $(1, -3)$.
Donner les coordonnées sphériques des points de coordonnées cartésiennes suivantes : $(1, 1, 1)$, $(0, 2, 0)$, $(-1, -3, 1)$.

Exercice 6. Coefficients de corrélation partielle.
Considérons l'exemple suivant : pour mesurer l'efficacité des pompiers, on calcule la corrélation entre le nombre de pompiers p envoyés sur un sinistre et l'amplitude d des dégâts. On trouve

$$r_{pd} = 0,7.$$

Faut-il conclure de cette corrélation élevée que pour réduire les dégâts il faut diminuer les effectifs de pompiers ? Cette conclusion serait exacte si la statistique portait sur des incendies de même taille initiale. En d'autres termes, on voit bien que cette variable taille t étant fortement corrélée à p et d introduit une corrélation « artificielle » entre le nombre de pompiers envoyés et les dégâts. Il faudrait calculer la corrélation sur des incendies de taille fixe, puis faire ensuite la moyenne sur la taille.
La solution mathématique est de calculer la corrélation partielle entre p et d sachant t
Le coefficient de corrélation partielle entre x et y sachant z est la corrélation entre le projeté de x et de y sur l'orthogonal de z, elle est donnée par la formule

$$r_{xy|z} = \frac{r_{xy} - r_{xz}r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xz}^2)(1 - r_{yz}^2)}}$$

On interprète la nullité de $r_{xy|z}$ comme un indice d'indépendance de x et y conditionnellement à z : lorsque z est connu, y n'apporte aucune information supplémentaire sur x.

Exercice 7. Dessiner les sous ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

(a) $\{(x,y) \mid \max(|x|,|y|) \leq 1\}$
(b) $\{(x,y) \mid |x| - |y|) < 1\}$
(c) $\{(x,y) \mid |x| + 2|y|) < 1\}$
(d) $\{(x,y) \mid 0 \leq y < x^2\}$
(e) $\{(x,y) \mid \sin y \leq x < 2\}$

Exercice 8. Pour tout nombre réel t, on considère la partie E_t de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$E_t = \{(x,y,z) \ / \ x + 2y - z = t\}.$$

Montrer que, pour tout t, E_t est un ensemble fermé non vide d'intérieur vide.

Exercice 9. Lesquels des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont ouverts ?

(a) $\{(x,y) \mid |x| < 1 \ \text{ et } \ |y| < 1\}$
(b) $\{(x,y) \mid xy \leq 1\}$
(c) $\{(x,y) \mid y > x^2 \ \text{ et } \ 0 \leq |x| < 2\}$
(d) $\{(x,y) \mid x > y\}$

Exercice 10. Donner l'intérieur, l'extérieur et la frontière des sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

(a) $\{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leqslant 2\}$
(b) $\left\{\left(x \ , \ \sin \dfrac{1}{x}\right) \mid x > 0\right\}$
(c) $\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{Z}\}$
(d) $\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{Q}\}$

Exercice 11. Soit $X \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que ∂X est fermé.

Exercice 12. Montrer qu'une réunion quelconque d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert. Montrer qu'une intersection finie d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert. Donner un exemple d'une intersection (infinie) d'ensembles ouverts qui ne soit pas ouverte.

Exercice 13. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^2$ compacts ?

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$
(b) $[0, +\infty[$
(c) l'ensemble des nombres rationnels, $\mathbb{Q}$
(d) $\mathbb{Q} \cap [0,1]$
(e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$
(f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \ \text{ et } \ y = x^2\}$
(g) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 1 \ \text{ et } \ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{x}\right\}$