# Exercices type pour l'examen

**Exercice 1** Une économie est structurée en trois secteurs 1, 2, 3. Chaque secteur utilise des consommations intermédiaires de production des autres pour travailler. Pour produire une unité, le secteur 1 utilise 0,1 unité de production du secteur 2, 0 du secteur 3. Pour produire une unité, le secteur 2 utilise 0,2 unité de production du secteur 1, 0 du secteur 3. Pour produire une unité, le secteur 3 utilise 0,1 unité de production du secteur 1, 0 du secteur 2.
1) Donner la matrice de technologie associée à cette économie.
2) Si la demande pour les produits du secteur 1 (resp. 2, resp. 3) est 1 (resp. 2, resp. 1), quelle doivent-être les productions brutes de chacun des secteurs ? (On pourra prendre $1/0,98 = 1,02$ et arrondir à deux chiffres après la virgule)

**Exercice 2** Soit la fonction de production $q = F(x, y, z) = x^{2/3}y^{1/2}z^{1/6}$.
1) Calculer $F(8, 16, 64)$. A l'aide de la formule de Taylor donner une valeur approchée de $F(7.7, 16, 65.2)$.
2) Calculer les élasticités de la production $F$ par rapport à chacune des quantités $x, y, z$.
3) La fonction $F$ est-elle homogène ? Que vaut $F(8000, 16000, 64000)$ ?
4) On suppose que $x, y, z$ dépendent du temps. Calculer le taux de croissance instantané de la production $F$ lorsque les taux de croissance instantanées des facteurs sont $T_x = 1.5\%$, $T_y = 2\%$, $T_z = 1,5\%$.

**Exercice 3** Calculer le déterminant de la matrice suivante $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

**Exercice 4** Calculer le déterminant suivant $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

**Exercice 5** Écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 en $(0, 1, 1)$ de la fonction

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 - (x + z)^{2/3}.$$

**Exercice 6** Étudier la nature des points stationnaires des deux fonctions suivantes :

$$f(x, y) = 4x^2y + 2x^3 - 4xy + 2x + 1, \quad g(x, y, z) = 1 + 2y - 3y^2 + 2xz - 3z^2.$$

**Exercice 7** Posons

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A^2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, puis $A^n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour un entier $n$ quelconque. Faire la même chose avec le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ à la place du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
b) Écrire $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ comme une combinaison linéaire des deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
c) En déduire $A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis l'expression de $A^n$.

**Exercice 8** La fonction de satisfaction d'un individu est donnée par :

$$S(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^3 + 2^{x_3}$$

où $x_i$ désigne la quantité de bien $i$ dont le prix est $p_i$. Soit $R$ le revenu de l'individu $[\sum_{i=1}^n p_i x_i \leq R]$.

a) La satisfaction maximale ne peut-elle être atteinte que sur l'hyperplan du revenu, c'est-à-dire pour $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = R$ ?

b) Utiliser la méthode du multiplicateur de Lagrange pour déterminer ce maximum lorsque $p_1 = 1, p_2 = 3, p_3 = 4$ ? Que se passe-t-il lorsque $p_3 = 0$ ?

**Exercice 9** La fonction de satisfaction d'un individu est donnée par :

$$S(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2/2 + 3x_3 x_2$$

où $x_i$ désigne la quantité de bien $i$ dont le prix est $p_i$. Soit $R$ le revenu de l'individu $[\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq R]$.

a) La satisfaction maximale ne peut-elle être atteinte que sur l'hyperplan du revenu, c'est-à-dire pour $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = R$ ?

b) Utiliser la méthode du multiplicateur de Lagrange pour déterminer ce maximum lorsque $p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = 3$ ?