Exercices type pour l'examen

Exercice 1. Quelques questions de cours.
1) Montrer que si A est inversible alors son déterminant n'est pas nul.
2) Définition d'une famille libre.
3) Définition d'une base de $\mathbb{R}^3$.
4) Etant donnés trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ (ou quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$). Savoir déterminer s'ils forment une base de $\mathbb{R}^3$(ou de $\mathbb{R}^4$).
5) Notons $V_1, \ldots, V_n$ les vecteurs colonnes d'une matrice A carrée $n \times n$. Soit W un vecteur. Ecrire AW comme combinaison linéaire des V_i (il faut faire intervenir les coefficients de W).
6) Les intégrations par parties pour obtenir le développement de Taylor.
7) Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Pourquoi le gradient de f est-il nul en un point où f atteint un maximum local ?

Exercice 2. Une économie est structurée en trois secteurs 1, 2, 3. Chaque secteur utilise des consommations intermédiaires de production des autres pour travailler. Pour produire une unité, le secteur 1 utilise 0,1 unité de production du secteur 2, 0 du secteur 3. Pour produire une unité, le secteur 2 utilise 0,2 unité de production du secteur 1, 0 du secteur 3. Pour produire une unité, le secteur 3 utilise 0,1 unité de production du secteur 1, 0 du secteur 2.
1) Donner la matrice de technologie associée à cette économie.
2) Si la demande pour les produits du secteur 1 (resp. 2, resp. 3) est 1 (resp. 2, resp. 1), quelle doivent-être les productions brutes de chacun des secteurs ? (On pourra prendre $1/0,98 = 1,02$ et arrondir à deux chiffres après la virgule)

Exercice 3. Considérons les fonctions suivantes :

$$x(u,v) = u^2 + v^2, \ y(u,v) = uv - v, \ z(u,v) = v^2 + u,$$

$$f(x,y,z) = x^2 + xy - 3z^3.$$

Posons $F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Calculer les dérivées partielles de F par rapport à u et v.

Exercice 4. Soit f une fonction homogène de degré α.
1) Ecrire ce que ça signifie : $f(tx_1, \ldots, tx_n) = ...$
2) Dériver de deux façons les deux membres de la question 1) par rapport à t. En déduire l'identité d'Euler (prendre une valeur particulière de t).

Exercice 5. Soit f une fonction de trois variables x, y, z homogène de degré 2. On suppose que x, y, z dépendent du temps.
1) Exprimer le taux d'accroissement instantané de f en fonction des élasticités partielles de f et des taux de croissances instantanés de x, y, z. Donner la démonstration de l'égalité.
2) On se place en un point où les élasticités de f sont toutes égales entre elles. Que vaut le taux d'accroissement de f si $T_x = 1.5\%$, $T_y = 2\%$, $T_z = 1,5\%$?

Exercice 6. Soit la fonction de production $q = F(x,y,z) = x^{2/3}y^{1/2}z^{1/6}$.
1) Calculer $F(8,16,64)$. A l'aide de la formule de Taylor donner une valeur approchée de $F(7.7,16,65.2)$.
2) Calculer les élasticités de la production F par rapport à chacune des quantités x, y, z.
3) La fonction F est-elle homogène ? Que vaut $F(8000,16000,64000)$?
4) On suppose que x, y, z dépendent du temps. Calculer le taux de croissance instantané de la production F lorsque les taux de croissance instantanées des facteurs sont $T_x = 1.5\%$, $T_y = 2\%$, $T_z = 1,5\%$.

Exercice 7. Calculer le déterminant de la matrice suivante $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 8. Calculer le déterminant suivant $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

Exercice 9. Écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 en $(0, 1, 1)$ de la fonction

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 - (x + z)^{2/3}.$$

Exercice 10. Étudier la nature des points stationnaires des deux fonctions suivantes :

$$f(x, y) = x^2y + 2x^3 + 2xy + 2x + 1, \quad g(x, y, z) = 1 + 2y + 3y^2 + 2xz - 3z^2.$$

Exercice 11. Posons

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, puis $A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour un entier n quelconque. Faire la même chose avec le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ à la place du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
b) Écrire $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ comme une combinaison linéaire des deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
c) En déduire $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis l'expression de A^n.

Exercice 12. La fonction de satisfaction d'un individu est donnée par :

$$S(x_1, x_2, x_3) = x_1^{3/2} + x_2^2 + x_3^2$$

où x_i désigne la quantité de bien i dont le prix est p_i. Soit R le revenu de l'individu $[\sum_{i=1}^n p_i x_i \leq R]$.
a) La satisfaction maximale ne peut-elle être atteinte que sur l'hyperplan du revenu, c'est-à-dire pour $\sum_{i=1}^n p_i x_i = R$?
b) Utiliser la méthode du multiplicateur de Lagrange pour déterminer ce maximum lorsque $p_1 = 9, p_2 = 3, p_3 = 2$? Que se passe-t-il lorsque $p_3 = 0$?