

Exercices type pour l'examen

Exercice 1. Une économie est structurée en trois secteurs 1, 2, 3. Chaque secteur utilise des consommations intermédiaires de production des autres pour travailler. Pour produire une unité, le secteur 1 utilise 0,1 unité de production du secteur 2, 0 du secteur 3. Pour produire une unité, le secteur 2 utilise 0,2 unité de production du secteur 1, 0 du secteur 3. Pour produire une unité, le secteur 3 utilise 0,1 unité de production du secteur 1, 0 du secteur 2.

- 1) Donner la matrice de technologie associée à cette économie.
- 2) Si la demande pour les produits du secteur 1 (resp. 2, resp. 3) est 1 (resp. 2, resp. 1), quelle doivent-être les productions brutes de chacun des secteurs ? (On pourra prendre $1/0,98 = 1,02$ et arrondir à deux chiffres après la virgule)

Exercice 2. Considérons les fonctions suivantes :

$$x(u, v) = u^2 + v^2, \quad y(u, v) = uv - v, \quad z(u, v) = v^2 + u,$$

$$f(x, y, z) = x^2 + xy - 3z^3.$$

Posons $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Calculer les dérivées partielles de F par rapport à u et v .

Exercice 3. Soit f une fonction de trois variables x, y, z homogène de degré 2. On suppose que x, y, z dépendent du temps.

- 1) Exprimer le taux d'accroissement instantané de f en fonction des élasticité partielles de f et des taux de croissances instantanés de x, y, z . Donner la démonstration de l'égalité.
- 2) On se place en un point où les élasticité de f sont toutes égales entre elles. Que vaut le taux d'accroissement de f si $T_x = 1.5\%$, $T_y = 2\%$, $T_z = 1,5\%$?

Exercice 4. Soit la fonction de production $q = F(x, y, z) = x^{2/3}y^{1/2}z^{1/6}$.

- 1) Calculer $F(8, 16, 64)$. A l'aide de la formule de Taylor donner une valeur approchée de $F(7.7, 16, 65.2)$.
- 2) Calculer les élasticité de la production F par rapport à chacune des quantités x, y, z .
- 3) La fonction F est-elle homogène ? Que vaut $F(8000, 16000, 64000)$?
- 4) On suppose que x, y, z dépendent du temps. Calculer le taux de croissance instantané de la production F lorsque les taux de croissance instantanés des facteurs sont $T_x = 1.5\%$, $T_y = 2\%$, $T_z = 1,5\%$.

Exercice 5. Calculer le déterminant de la matrice suivante $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. Calculer le déterminant suivant $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

Exercice 7. Écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 en $(0, 1, 1)$ de la fonction

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 - (x + z)^{2/3}.$$

Exercice 8. Étudier la nature des points stationnaires des deux fonctions suivantes :

$$f(x, y) = 4x^2y + 2x^3 - 4xy + 2x + 1, \quad g(x, y, z) = 1 + 2y - 3y^2 + 2xz - 3z^2.$$

Exercice 9. Posons

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Calculer $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, puis $A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour un entier n quelconque. Faire la même chose avec le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ à la place du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- b) Écrire $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ comme une combinaison linéaire des deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- c) En déduire $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis l'expression de A^n .

Exercice 10. La fonction de satisfaction d'un individu est donnée par :

$$S(x_1, x_2, x_3) = x_1^{3/2} + x_2^2 + x_3^2$$

où x_i désigne la quantité de bien i dont le prix est p_i . Soit R le revenu de l'individu $[\sum_{i=1}^n p_i x_i \leq R]$.

- a) La satisfaction maximale ne peut-elle être atteinte que sur l'hyperplan du revenu, c'est-à-dire pour $\sum_{i=1}^n p_i x_i = R$?
- b) Utiliser la méthode du multiplicateur de Lagrange pour déterminer ce maximum lorsque $p_1 = 9, p_2 = 3, p_3 = 2$? Que se passe-t-il lorsque $p_3 = 0$?