Exercice 1. Soient $u_1 = (1, 2, 3)$ et $u_2 = (2, -1, 1)$, $v_1 = (1, 0, 1)$ et $v_2 = (2, -1, 1)$. Montrer que le sous-espace engendré par u_1 et u_2 coïncide avec le sous-espace vectoriel engendré par v_1 et v_2, de deux manières.

1. En écrivant u_1 et u_2 chacun comme combinaison linéaire de v_1 et v_2.
2. En trouvant des équations pour chacun de ces deux sous-espaces.
3. Soient P_1 le plan paramétré par $P_1 = \{(\lambda, \mu, \lambda + \mu), \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ et $P_2 = \{(\lambda + 2\mu, 2\lambda - \mu, 3\lambda + \mu), \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. Comparer ces deux plans.

C'est l'exercice 7 de la feuille 3.

1. On cherche α_1, α_2 tels que $u_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ et β_1, β_2 tels que $u_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$. Cela revient à résoudre les deux systèmes linéaires

$$\left\{\begin{array}{cccc} \alpha_1 & +2\alpha_2 & = & 1 \\ 0.\alpha_1 & -\alpha_2 & = & 2 \\ \alpha_1 & +\alpha_2 & = & 3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{cccc} \beta_1 & +2\beta_2 & = & 2 \\ 0.\beta_1 & -\beta_2 & = & -1 \\ \beta_1 & +\beta_2 & = & 1 \end{array}\right.$$

Remarque : a priori il n'y a pas de raison que ces systèmes aient des solutions; l'énoncé semble indiquer que oui. On peut résoudre les deux en même temps par la méthode de Gauss-Jordan puisque les matrices des premiers membres sont les mêmes :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Conclusion les deux systèmes ont chacun une solution unique. On obtient :

$$u_1 = 5v_1 - 2v_2 \text{ et } u_2 = v_2$$

Oui, on aurait pu remarquer que u_2 et v_2 étaient égaux.

Comme u_1 et u_2 sont des combinaisons linéaires de v_1 et v_2, on a

$$Vect(u_1, u_2) \subset Vect(v_1, v_2).$$

Mais u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires. En effet, comme ni u_1 ni u_2 n'est nul, ils seraient colinéaires s'il existait un nombre λ tel que $u_1 = \lambda u_2$. On aurait en particulier $1 = 2\lambda$ et $2 = -\lambda$, ce qui est impossible.

Le sous-espace vectoriel $Vect(u_1, u_2)$ est donc un plan. Comme $Vect(v_1, v_2)$ est au plus de dimension 2 et contient le plan $Vect(u_1, u_2)$ il est de dimension 2 et coïncide avec $Vect(u_1, u_2)$.

2. Pour trouver une équation de $Vect(u_1, u_2)$ écrivons que le vecteur $w = (x, y, z)$ est combinaison linéaire de u_1 et u_2 : il existe λ_1 et λ_2 tels que

$$w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$$

soit

$$\left\{\begin{array}{cccc} \lambda_1 & +2\lambda_2 & = & x \\ 2\lambda_1 & -\lambda_2 & = & y \\ 3\lambda_1 & +\lambda_2 & = & z \end{array}\right.$$

Appliquons l'algorithme de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 2 & -1 & y \\ 3 & 1 & z \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & -5 & y-2x \\ 0 & -5 & z-3x \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/5.x + 2/5.y \\ 0 & 1 & 2/5.x - 1/5.y \\ 0 & 0 & z - x - y \end{array}\right)$$

Le système n'a de solution (alors unique) que si $z - x - y = 0$. C'est l'équation de $Vect(u_1, u_2)$ recherchée.

Passons à $Vect(v_1, v_2)$. On procède de la même façon. Pour trouver une équation de $Vect(u_1, u_2)$ écrivons que le vecteur $w = (x, y, z)$ est combinaison linéaire de v_1 et v_2 : il existe λ_1 et λ_2 tels que

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

soit

$$\left\{\begin{array}{cccc} \lambda_1 & +2\lambda_2 & = & x \\ 0.\lambda_1 & -\lambda_2 & = & y \\ \lambda_1 & +\lambda_2 & = & z \end{array}\right.$$

Appliquons l'algorithme de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & y \\ 1 & 1 & z \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & y \\ 0 & -1 & z-x \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x+2y \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & z-x-y \end{array}\right)$$

Le système n'a de solution (alors unique) que si $z - x - y = 0$. C'est l'équation de $Vect(v_1, v_2)$ recherchée.

Les deux plans $Vect(u_1, u_2)$ et $Vect(v_1, v_2)$ ont même équation ; ils sont égaux (il aurait suffit qu'ils aient des équations proportionnelles).

3. On remarque que
$$P_2 = Vect(u_1, u_2)$$
et que si on pose $w_1 = (1, 0, 1)$ et $w_2 = (0, 1, 1)$,
$$P_1 = Vect(w_1, w_2).$$
On vérifie que les coordonnées de w_1 et w_2 satisfont l'équation du plan $Vect(u_1, u_2)$. Par ailleurs w_1 et w_2 ne sont pas colinéaires. Conclusion : $P_1 = P_2$.