Théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré

tribu mesure

I un intervalle de $\mathbb{R}$.

$F : I \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

(i) $\forall t \in I \quad x \longmapsto F(t,x)$ est mesurable.

(ii) $\exists t_0 \in I$ tq $x \longmapsto F(t_0, x)$ est intégrable.

(iii) Il existe un ensemble $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu({}^cA) = 0$

et $\forall x \in A \quad t \longmapsto F(t,x)$ est dérivable

(iv) Il existe $g : X \to \mathbb{R}_+$ intégrable pour μ telle que

$$\forall x \in A \quad \forall t \in I \quad \left| \frac{\partial F}{\partial t}(t,x) \right| \leq g(x)$$

Alors pour tout $t \in I$ $\quad \varphi(t) = \int_X F(t,x)\, \mu(dx)$ existe

La fonction φ ainsi définie est dérivable sur I de dérivée

$$\varphi'(t) = \int_X \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)\, \mu(dx)$$

Exemple d'application (Exercice 9)

$X = \mathbb{N}^*$

$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$

μ = mesure de comptage.

Les fonctions sur X sont les suites $(u(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ souvent notées plutôt en utilisant un indice $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Comme $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ toute fonction sur $\mathbb{N}^*$ est mesurable.

Une fonction $(u(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est intégrable si la série de terme général $\sum u(n)$ est absolument intégrable.

$$(u_n) \text{ intégrable pour } \mu \iff \sum_{n\geq 1} |u_n| < +\infty$$

Considérons l'application :

$$F :]1,+\infty[\times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t\ ,\ n) \longmapsto \frac{1}{n^t}$$

(i) $\forall t \in]1,+\infty[$ $\quad n \longmapsto \frac{1}{n^t}$ est mesurable.

(car toutes les fonctions définies sur $\mathbb{N}^*$ sont mesurables si on munit comme ici, $\mathbb{N}^*$ de la tribu discrète)

(ii) $\exists t_0 \in]1,+\infty[$ tel que $n \longmapsto \frac{1}{n^{t_0}}$ est intégrable.

(c'est vrai pour tout $t_0 > 1$, critère de Riemann).

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad t \longmapsto \frac{1}{n^t}$ est dérivable sur $]1,+\infty[$

(de dérivée $t \longmapsto -\frac{\ln n}{n^t}$)

La propriété (iv) n'est pas satisfaite ici.

Lorsque t ~~tend~~ vers 1, $-\frac{\ln n}{n^t}$ tend vers $-\frac{\ln n}{n}$.

Pour obtenir une majoration de $\left|-\frac{\ln n}{n^t}\right|$ indépendante de $t > 1$

il faut prendre $\frac{\ln n}{n}$. Or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n}$ diverge.

Mais on remarque que si $t > a > 1$ alors

$$\forall n \geq 1 \quad \left|-\frac{\ln n}{n^t}\right| \leq \frac{\ln n}{n^a}$$

On sait que pour tout $\varepsilon > 0$ $\ln n = o(n^\varepsilon)$.

Prenons $\varepsilon > 0$ tel que $a - \varepsilon > 1$

(par exemple $\varepsilon = \frac{a-1}{2}$).

alors $\frac{\ln n}{n^a} = \frac{o(n^\varepsilon)}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^{a-\varepsilon}}\right)$ avec $a - \varepsilon > 1$.

Or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{a-\varepsilon}}$ converge (critère de Riemann)

donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^a}$ converge.

Considérons alors la fonction F sur $]a, +\infty[\times \mathbb{N}^*$

$$F :]a, +\infty[\times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t, n) \longmapsto \frac{1}{n^t}$$

Les propriétés (i), (ii), (iii) sont vérifiées de la même façon évidemment. et on a

(iv) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\forall t > a$ $\left| -\frac{\ln n}{n^t} \right| \leq \frac{\ln n}{n^a}$

et $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^a} < +\infty$.

Le théorème de dérivation sous l'intégrale assure que

$t \longmapsto \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^t}$ est dérivable sur $]a, +\infty[$ de fonction dérivée $t \longmapsto \sum_{n \geq 1} \frac{-\ln n}{n^t}$

Notons $\varphi(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^t}$.

On a montré que, pour tout $a > 1$, la fonction φ était dérivable sur $]a, +\infty[$ de dérivée $\varphi'(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{-\ln n}{n^t}$

Cela entraîne que φ est dérivable sur $]1, +\infty[$. de dérivée $\sum_{n \geq 1} \frac{-\ln n}{n^t}$.

En effet soit $t > 1$. Il existe $a > 1$ tel que $t \in]a, +\infty[$ (prendre $a = \frac{1+t}{2}$ par exemple).

Comme φ est dérivable sur $]\frac{1+t}{2}, +\infty[$ elle est en particulier dérivable en $t \left(\in]\frac{1+t}{2}, +\infty[\right)$.