Exercice 16

Notons $\mathcal{B}$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$. C'est la plus petite tribu contenant l'ensemble de tous les ouverts de $\mathbb{R}$.

Notons $\mathcal{A}$ la tribu engendrée par l'ensemble des intervalles ouverts $]a, b[$ $a < b$. C'est la plus petite tribu contenant l'ensemble de tous les intervalles $]a, b[$.

Comme les intervalles $]a, b[$ sont des ouverts ils appartiennent à $\mathcal{B}$. $\mathcal{B}$ est donc une tribu contenant l'ensemble des intervalles ouverts $]a, b[$. Comme $\mathcal{A}$ est la plus petite (au sens de l'inclusion) tribu ayant cette propriété on a $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

En fait on a égalité $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Pour le voir il suffit de montrer que tout ouvert est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts. En effet, si c'est le cas, comme $\mathcal{A}$ est une tribu, elle est stable par réunion dénombrable et contient l'ensemble des réunions dénombrables d'intervalles $]a, b[$ c'est-à-dire l'ensemble des ouverts. Or par définition $\mathcal{B}$ est la plus petite tribu ayant cette propriété, donc $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

Reste à voir qu'un ouvert est une réunion dénombrable d'intervalles $]a, b[$.

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$.

Le cas de $\emptyset$ n'est pas très intéressant. Supposons $O \neq \emptyset$.

Par définition O est ouvert si

$$\forall x \in O \ \exists \alpha_x > 0 \ \text{tq} \ ]x-\alpha_x, x+\alpha_x[\subset O.$$

Associons ainsi à chaque élément x de O un $\alpha_x > 0$ tq

$$]x-\alpha_x, x+\alpha_x[\subset O.$$

On a alors $\displaystyle\bigcup_{x \in O}]x-\alpha_x, x+\alpha_x[= O$.

Mais la réunion obtenue n'est pas dénombrable.

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ pour tout $x \in O$ il existe deux nombres rationnels q_x, p_x tels que

$$x-\alpha_x < p_x < x < q_x < x+\alpha_x.$$

Pour tout $x \in O$ on a alors $\{x\} \subset]p_x, q_x[\subset]x-\alpha_x, x+\alpha_x[\subset O$

On en déduit $\displaystyle O = \bigcup_{x \in O}]p_x, q_x[$.

À première vue on pourrait penser que nous n'avons rien gagné car la réunion est toujours indexée par l'ensemble non dénombrable O.

Mais l'ensemble des intervalles $]p,q[$ à extrémités p,q rationnelles est dénombrable

(Pour le voir il suffit de remarquer que $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ est dénombrable et que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} & \longrightarrow & \{]p,q[\ ,\ p<q, (p,q)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\} \\ (k,l) & \longmapsto &]\min(k,l), \max(k,l)[\end{array}$$

est surjective.)

Or l'ensemble $\{]p_x,q_x[\ /\ x\in O\}$ est un sous-ensemble de l'ensemble des intervalles à extrémités rationnelles. Il est donc dénombrable. Il existe une suite (x_n) telle que

$$\{]p_x,q_x[\ /\ x\in O\} = \{]p_{x_n},q_{x_n}[\ /\ n\in\mathbb{N}\}.$$

On a alors :

$$O = \bigcup_{x\in O}]p_x,q_x[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]p_{x_n},q_{x_n}[$$

ce qui montre que O est réunion d'une famille dénombrable d'intervalles.

Remarque : Ce que nous avons fait montre que $\mathcal{B}$ est engendrée par l'ensemble des intervalles à extrémités rationnelles