Théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré

tribu mesure

I un intervalle de $\mathbb{R}$.

$F : I \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

(i) $\forall t \in I \quad x \longmapsto F(t,x)$ est mesurable.

(ii) $\exists t_0 \in I$ tq $x \longmapsto F(t_0, x)$ est intégrable.

(iii) Il existe un ensemble $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu({}^cA) = 0$

et $\forall x \in A \quad t \longmapsto F(t,x)$ est dérivable

(iv) Il existe $g : X \to \mathbb{R}_+$ intégrable pour μ telle que

$$\forall x \in A \quad \forall t \in I \quad \left| \frac{\partial F}{\partial t}(t,x) \right| \leq g(x)$$

Alors pour tout $t \in I$ $\quad \varphi(t) = \int_X F(t,x)\,\mu(dx)$ existe

La fonction φ ainsi définie est dérivable sur I de dérivée

$$\varphi'(t) = \int_X \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)\,\mu(dx)$$

Exemple d'application (Exercice 10)

$X = \mathbb{R}_+^*$

$\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*)$ = la tribu borélienne sur $\mathbb{R}_+^*$

μ = mesure de Lebesgue.

Pour qu'une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ soit mesurable il suffit que $f^{-1}(]a,b[)$ soit élément de $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*)$ pour tous a, b dans $\mathbb{R}$. C'est le cas en particulier si f est continue.

Nous verrons en cours la définition d'une fonction intégrable. Mais vous pouvez retenir dès maintenant que si f est continue et que l'intégrale généralisée (au sens de Riemann) $\int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt$ converge alors f est intégrable.

Considérons l'application

$$F :]0,+\infty[\times]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t\ ,x) \longmapsto x^{t-1}e^{-x}$$

(i) $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad x \longmapsto x^{t-1}e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

donc mesurable sur $(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$

(ii) Soit $t_0 > 0$. L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} x^{t_0-1}e^{-x}dx$ est absolument convergente car la fonction à intégrer est continue positive et majorée par $\frac{1}{x^2}$ pour x assez grand (croissances comparées de $x \mapsto x^{t_0-1}$ et $x \mapsto e^{x}$)

L'intégrale (éventuellement) impropre $\int_0^1 x^{t_0-1}e^{-x}dx$ est aussi absolument convergente car la fonction à intégrer est continue (sur $]0,1]$) positive et équivalente à $\frac{1}{x^{1-t_0}}$ lorsque x tend vers 0 (or comme $1-t_0<1$ on sait que $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-t_0}}$ est convergente)

(iii) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \longmapsto x^{t-1} e^{-x}$ est dérivable de fonction dérivée $t \longmapsto \ln x . x^{t-1} e^{-x}$

La propriété (iv) n'est pas satisfaite

Lorsque t tend vers 0 $\ln x . x^{t-1} e^{-x}$ tend vers $\ln x . \frac{e^{-x}}{x}$ et la fonction $x \longmapsto |\ln x| \frac{e^{-x}}{x}$ n'est pas intégrable sur $[0,1]$ (l'intégrale impropre $\int_0^1 |\ln x| \frac{e^{-x}}{x} dx$ diverge).

Lorsque t tend vers $+\infty$ $\ln x . x^{t-1} . e^{-x}$ tend vers $+\infty$ si $x > 1$

La possibilité de considérer des valeurs de t arbitrairement petites ou arbitrairement grandes semble poser problème.

Soient $\alpha < \beta$ deux nombres réels positifs. Prenons $\alpha < 1 < \beta$

Pour $t \in]\alpha, \beta[$ si $x \in]0,1[$ $|\ln x \, x^{t-1} e^{-x}|$
$< |\ln x| \, x^{\alpha - 1}$

(car $(t-1) > (\alpha - 1)$ et $\ln x (t-1) < \ln x (\alpha - 1)$ car $\ln x < 0$)

Pour $t \in]\alpha, \beta[$ si $x \geq 1$ $|\ln x \, x^{t-1} e^{-x}|$
$< |\ln x| \, e^{-x} x^{\beta - 1}$

On en déduit que pour tout $t \in]\alpha, \beta[$ on a :

$$|\ln x \, x^{t-1} e^{-x}| \leq \underbrace{|\ln x| \, x^{\alpha-1} \mathbb{1}_{]0,1[}(x) + |\ln x| \, x^{\beta} e^{-x} \mathbb{1}_{[1,\infty[}(x)}_{\text{indépendant de } t}$$

On montre que la fonction g définie par

$$g(x) = |\ln(x)|\, x^{\alpha-1}\, \mathbb{1}_{]0,1[}(x) + |\ln x|\, x^{\beta-1} e^{-x}\, \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$$

est intégrable (croissances comparées)

Cela signifie que si on considère la restriction de F à $]\alpha,\beta[\times \mathbb{R}_+^*$ les quatre conditions du théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre sont satisfaites.

On en déduit que pour tout $t \in]\alpha,\beta[$ l'intégrale

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x}\, dx$$ est bien définie (ce que nous avons déjà vu quand nous avons vérifié (ii)) et que la fonction Γ ainsi définie sur $]\alpha,\beta[$ est dérivable de dérivée

$$\Gamma'(t) = \int_0^{+\infty} \ln x\, x^{t-1} e^{-x}\, dx. \qquad (*)$$

La fonction est donc définie dérivable et satisfait $(*)$ sur la réunion $\bigcup_{0<\alpha<1<\beta}]\alpha,\beta[$. Or cette réunion est $]0,+\infty[$