Examen 2008

Exercice 1. (3 points)
1) Donner la définition d'une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Les trois vecteurs

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2. (7 points)
1) Calculer le déterminant de la matrice

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2) Écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 en $(0, 1, 1)$ de la fonction

$$f(x, y, z) = e^x + y^2 - (x + z)^{1/3}.$$

3) Trouver les valeurs propres de la matrice

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4) Inverser la matrice de la question précédente.

Exercice 3. (4 points)
La fonction de satisfaction d'un individu est donnée par :

$$S(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

où x_i désigne la quantité de bien i dont le prix est p_i. Soit R le revenu de l'individu [$\sum_{i=1}^n p_i x_i \leq R$].
a) La satisfaction maximale ne peut-elle être atteinte que sur l'hyperplan du revenu, c'est-à-dire pour $\sum_{i=1}^n p_i x_i = R$?
b) Utiliser la méthode du multiplicateur de Lagrange pour déterminer ce maximum lorsque $p_1 = 3, p_2 = 1, p_3 = 2$? Que se passe-t-il lorsque $p_3 = 0$?

Exercice 4. (6 points)
Soit f une fonction homogène de degré α.
1) Ecrire ce que ça signifie : $f(tx_1, \ldots, tx_n) =$ ....
2) Dériver de deux façons les deux membres de la question 1) par rapport à t. En déduire l'identité d'Euler (prendre une valeur particulière de t).
On suppose que x, y, z dépendent du temps et que α vaut 2,5.
3) Exprimer le taux d'accroissement instantané de f en fonction des élasticités partielles de f et des taux de croissances instantanés de x, y, z. Donner la démonstration de l'égalité.
4) Que vaut le taux d'accroissement de f si $T_x = T_y = T_z = 2\%$?