

Examen du 11 mai 2007

Tout document est interdit. Toute calculatrice est interdite.

Exercice 1. (6 points)

1) A quelle condition sur le nombre réel a la matrice suivante $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Calculer la matrice inverse quand elle existe.

2) Écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 en $(1, 1, 0)$ de la fonction

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 - (x + z)^{1/3}.$$

3) Calculer le déterminant de la matrice

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. (5 points)

1) Étudier la nature des points stationnaires de la fonction :

$$f(x, y) = x^3 - 3x + xy^2.$$

2) Trouver les extrema de la fonction f sur l'ensemble

$$[0, 2] \times [-1, 1] = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}.$$

Exercice 3. (4 points)

Une économie est structurée en trois secteurs 1, 2, 3. Chaque secteur utilise des consommations intermédiaires de production des autres pour travailler. Pour produire une unité, le secteur 1 utilise 0 unité de production du secteur 2, 0,1 du secteur 3. Pour produire une unité, le secteur 2 utilise 0,1 unité de production du secteur 1, 0,1 du secteur 3. Pour produire une unité, le secteur 3 utilise 0 unité de production du secteur 1, 0,1 du secteur 2.

1) Donner la matrice de technologie associée à cette économie.

2) Si la demande pour les produits du secteur 1 est 1, celle pour le secteur 2 est 2 et celle pour le secteur 3 est 1, quelles doivent-être les productions brutes de chacun des secteurs ? (On pourra prendre $1/0,99 = 1,01$ et arrondir à deux chiffres après la virgule)

Exercice 4. (5 points) Soit f une fonction de trois variables x, y, z homogène de degré 3. On suppose que x, y, z dépendent du temps.

1) Exprimer le taux d'accroissement instantané de f en fonction des élasticités partielles de f et des taux de croissances instantanés de x, y, z . Donner la démonstration de l'égalité.

2) On se place en un point où les élasticités de f sont toutes égales entre elles. Que vaut le taux d'accroissement de f si $T_x = 1,5\%$, $T_y = 2\%$, $T_z = 1,5\%$?