Université de Rennes 1
UFR de Mathématiques

L3 Mathématiques INTL
18/12/2017

Examen – session principale

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés. Le sujet comporte 2 pages et la durée est de 2 heures. Une rédaction **rigoureuse** *et des réponses* **argumentées** *sont attendues. Toute interversion du type* $\lim_n \int = \int \lim_n$, $\sum_n \int = \int \sum_n$ *ou* $\int_X \int_Y = \int_Y \int_X$ *toute continuité, dérivabilité sous l'intégrale devra être justifiée en citant les théorèmes utilisés et en vérifiant leurs hypothèses.*

Exercice 1. *Fonctions mesurables*

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et (f_n) une suite de fonctions mesurables définies sur X à valeurs réelles.

1. Montrer que $\sup_n f_n$ est une fonction mesurable.
2. Montrer que $\{x \in X \ / \ \sup_n f_n(x) < +\infty\} \in \mathcal{A}$.

Exercice 2. *Interversion de limites*

1. Justifier l'existence de la limite
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)^{1/n}}.$$
2. Calculer cette limite.

Exercice 3. *Volume d'un cône*

Soient $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ avec $z_0 \neq 0$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. On appelle C le cône de $\mathbb{R}^3$ de sommet (x_0, y_0, z_0) et de base $\Omega \times \{0\}$, donné par la caractérisation
$$C = \{\ (t(x-x_0)+x_0,\ t(y-y_0)+y_0,\ (1-t)z_0),\ t \in]0,1[,\ (x,y) \in \Omega\}.$$

1. Montrer que C est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
2. On considère l'application
$$\varphi : (t,x,y) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (t(x-x_0)+x_0, t(y-y_0)+y_0, (1-t)z_0).$$

a. Montrer que φ définit une bijection de $]0,1[\times\Omega$ dans C.
b. Calculer $J_\varphi(t,x,y)$ pour $t\in]0,1[$ et $(x,y)\in\Omega$.
c. Montrer que φ définit un C^1-difféomorphisme de $]0,1[\times\Omega$ dans C.

3. Montrer que $\lambda_3(C)=\dfrac{|z_0|\lambda_2(\Omega)}{3}$.

Exercice 4. *Intégrales dépendant d'un paramètre*

On considère la fonction F définie de la façon suivante :

$$F(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\cos(tx)dx.$$

1. Justifier que $F(t)$ est définie pour tout $t\in\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que F satisfait l'équation différentielle $F'(t)+tF(t)=0$.
3. En déduire une expression explicite de F.
   On pourra utiliser l'égalité $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\ dx=\sqrt{2\pi}$.
4. Que vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\ \sin(tx)dx$?
5. Exprimer, en fonction de $\sigma\neq 0$ et t, l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}e^{itx}dx.$$
6. Justifier l'existence pour tout $t\in\mathbb{R}$ de
$$\phi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$
   et calculer $\phi(t)$.

Exercice 5. *Inégalité de Hölder généralisée*

On se place sur un espace mesuré $(E,\mathcal{A},\mu)$ et on considère $\alpha,\beta,\gamma\in[1,\infty]$ tels que $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=1$. On suppose que $f\in L^\alpha(E)$, $g\in L^\beta(E)$ et $g\in L^\gamma(E)$. On souhaite montrer qu'on a alors

$$\|fgh\|_1 \ \leq\ \|f\|_\alpha\,\|g\|_\beta\,\|h\|_\gamma.$$

1. Montrer que $fg\in L^{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}}(E)$, et que
$$\|fg\|_{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}}\ \leq\ \|f\|_\alpha\,\|g\|_\beta.$$
2. Conclure en appliquant l'inégalité de Hölder au produit $(fg)\times h$ pour des exposants bien choisis.