L'espérance de vie

L'espérance de vie d'une population n'est pas calculée en faisant la moyenne des âges des personnes mourant dans l'année. On utilise une autre méthode de calcul apparemment plus compliquée. Commençons par décrire cette méthode. Notons p_i la proportion des personnes ayant l'âge i au premier janvier qui sont encore vivant le 31 décembre. L'espérance de vie d'une population est égale à

$$\sum_{k=0}^{130} \prod_{i=0}^{k} p_i.$$

Expliquons un peu.

D'abord le 130. Les humains vivent très rarement plus de 120 ans. Imaginons qu'en France le doyen âgé de 118 ans meure dans l'année. Alors $p_{118} = 0$, et tous les produits suivant sont nuls. La somme précédente vaut alors

$$\sum_{k=0}^{117} \prod_{i=0}^{k} p_i.$$

Il suffit qu'il existe un âge tel que toutes les personnes de cet âge meurent dans l'année pour que les produits soient nuls à partir d'un certain rang. Cela ne se produit pas à coup sûr. On peut imaginer par exemple que pour tous les âges représentés une personne au moins survive. Il faudrait alors dire ce que vaut p_i quand aucune personne d'âge i n'existe au premier janvier (p_i est alors une proportion de la quantité nulle). Si on prend 0 (pourquoi pas ?) alors par exemple comme personne en France n'a atteint l'âge de 130 ans $p_{131} = 0$ et on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{k} p_i = \sum_{k=0}^{130} \prod_{i=0}^{k} p_i.$$

On pourrait trouver que cela pose un problème. Par exemple si le doyen des français a trois ans de moins que celui le plus vieux qui le suit (par exemple le doyen a 121 et le suivant 118) alors comme $p_{119} = 0$ on ne prend pas en compte le doyen. Remarquons qu'on ne le prend pas en compte non plus si tous ceux qui avaient 118 ans meurent mais pas lui. Si on considère que $p_i = 1$ quand l'âge i n'est pas représenté alors on considère que toutes les personnes d'âge i atteignent l'âge $i + 1$; or si une année tous les âges représentés ont des survivants alors on considère que si un certain âge est atteint alors on vit indéfiniment. La somme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{k} p_i$$

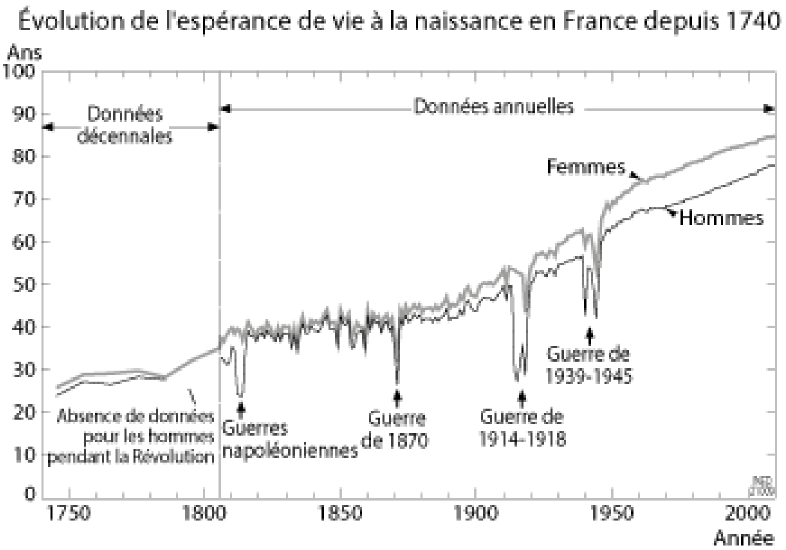
sera alors infini. On considérera donc que $p_i = 0$ si l'âge n'est pas représenté. Cela fait qu'on ne tient pas compte des personnes dont l'âge dépasse 115 ou 120 ans. Elles sont si peu nombreuses que l'influence sur le résultat sera très faible quelque soit la manière acceptable qu'on pourrait trouver de les prendre en compte.

Voici la définition que donne l'INSEE de l'espérance de vie : *L'espérance de vie à la naissance (ou à l'âge 0) représente la durée de vie moyenne - autrement dit l'âge moyen au décès - d'une génération fictive soumise aux conditions de mortalité de l'année. Elle caractérise la mortalité indépendamment de la structure par âge.*

On considère donc une population fictive (disons de 1000 personnes) et on lui applique à chaque âge les taux de mortalité de la population française constatée en 2012 par exemple. Au bout d'un certain temps il ne reste plus personne (les 1000 personnes sont mortes). On fait alors la moyenne des âges de décès constatés sur cette population fictive : on obtient l'espérance de vie à la naissance en France en 2012. Lien sur une animation créée par l'Ined : http://www.ined.fr/fr/tout_savoir_population/animations/esperance_vie/.

Pourquoi fait-on ça ? On obtient ainsi un résultat qui donne une moyenne si les taux de mortalité étaient les mêmes que ceux de l'année 2012. Cela permet de comparer les années : qu'une avancée médicale viennent modifier le taux de mortalité des nourrisson alors l'espérance de vie est modifiée, l'âge moyen de décès des morts de l'année beaucoup moins. D'autre part, comme affirmé dans la définition de l'Insee cela donne un résultat indépendant de la structure par âge. Imaginons par exemple qu'existe une classe démographique creuse dans une population. Alors quand cette classe atteindra un grand âge les décès de personnes très âgées seront sous représentés par rapport à celle de plus jeunes.

Quel est l'effet des guerres ? L'espérance chute brutalement pendant la période de guerre. Elle remonte presque aussi brusquement après la guerre.



Quel rapport entre ce qu'on trouve et la moyenne des âges de décès constatés dans l'année ? L'espérance de vie en 2012 donne la moyenne des âges de décès d'une population si tout se passe comme en 2012. Si tout se passait comme en 2012 pendant disons 250 ans et que chaque année le nombre d'enfants naissant était le même alors au bout d'un certain temps (disons 100 ans) les deux quantités coïncideraient. Remarquez que l'âge moyen des morts d'une année se comporte de manière similaire à l'espérance de vie pour les périodes de guerre. Pour tenir compte des guerres dans l'espérance de vie il faut faire une moyenne sur plusieurs années. On peut aussi calculer l'âge moyen de décès des personnes nées au cours d'une année donnée : par exemple personnes nées en 1895, personnes nées en 1943.

Pourquoi l'espérance de vie est-elle donnée par la formule

$$\sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{k} p_i ?$$

Notons X la variable aléatoire "durée de vie". On a

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = p_0.$$

De même

$$\mathbb{P}(X \geq i+1 | X \geq i) = p_i.$$

Ceci donne

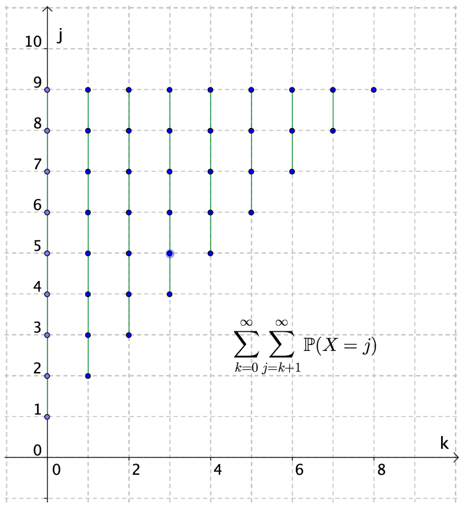
$$\mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{P}(X \geq k | X \geq k-1)\mathbb{P}(X \geq k-1) = p_{k-1}\mathbb{P}(X \geq k-1 | X \geq k-2)\mathbb{P}(X \geq k-2).$$

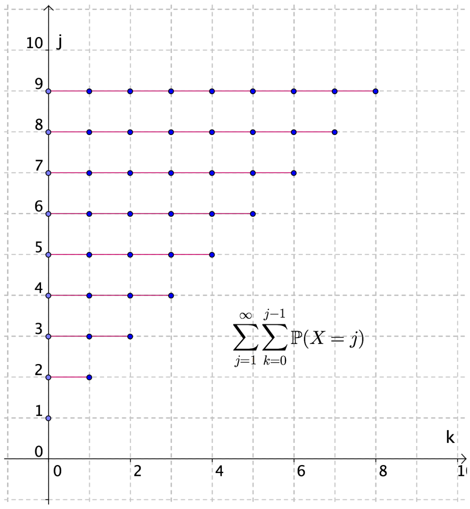
On obtient ainsi

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \prod_{i=0}^{k-1} p_i.$$

Écrivons maintenant la somme

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{k} p_i &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k+1) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{j-1} \mathbb{P}(X = j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} j\mathbb{P}(X = j) \\
&= \mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$


j
k
$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=k+1}^{\infty}\mathbb{P}(X=j)$


j
k
$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{j-1}\mathbb{P}(X=j)$