Devoir

On considère l'application suivante :

$$m^*: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,+\infty]$$
$$A \longmapsto \inf\left\{ \sum_{i=0}^{\infty} (b_i - a_i) \,/\, A \subset \bigcup_{i=0}^{\infty}]a_i; b_i[\right\}$$

Infimum sur l'ensemble des recouvrements de A par des familles dénombrables d'intervalles $]a_i, b_i[$

① Montrer que $m^*(\mathbb{R}) = +\infty$ $\quad m^*(]a,b[) = b-a$

$m^*(\{a\}) = 0$ $\quad m^*(E) = 0$ si E est dénombrable.

② Montrer que si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties de $\mathbb{R}$

$$m^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} m^*(E_n)$$

③ On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est mesurable pour m^* si

$$\forall E \subset \mathbb{R} \qquad m^*(A \cap E) + m^*({}^cA \cap E) = m^*(E)$$

Montrer que $\mathbb{R}$ est mesurable, que les parties dénombrables de $\mathbb{R}$ sont mesurables, que les intervalles sont mesurables, que si $\mu^*(A) = 0$ alors A est mesurable.

④ On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$ mesurables au sens de la question ③.

Montrer que $\mathcal{L}$ est stable par passage au complémentaire, par réunion, par réunion dénombrable. En déduire que $\mathcal{L}$ est une tribu contenant la tribu borélienne.

⑤ Montrer que :

$$m : \mathcal{L} \longrightarrow [0,+\infty]$$
$$A \longmapsto m^*(A)$$

définit une mesure sur $\mathcal{L}$ tq $m(]a,b[) = b-a$.

On a ainsi défini une mesure m sur une tribu contenant la tribu borélienne, mesure égale à la longueur sur les intervalles. C'est la mesure de Lebesgue.