Examen 2006 (Deuxième session)

Exercice 1. 1) Écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 en $(0,1,1)$ de la fonction

$$f(x,y,z) = x^3 + y^2 - (x+z)^{2/3}.$$

2) Calculer le déterminant de la matrice

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3) Écrire sous forme matricielle les formes quadratiques suivantes :

$$Q(x,y,z,t) = 2x^2 - 2y^2 + 3xy + 2z^2 - 3xz + 4zt - 6xt - 3t^2,$$

$$Q(a,b,c) = 2ab - 6bc + 4ac.$$

Exercice 2. Étudier la nature des points stationnaires des deux fonctions suivantes :

$$f(x,y) = 4x^2y + 2x^3 - 4xy + 2x + 1, \quad g(x,y,z) = 1 + 2y - 3y^2 + 2xz - 3z^2.$$

Exercice 3. Soit le système :

$$\begin{aligned} mx + y - z &= a \\ x + my + z &= b \\ x + y + mz &= c \end{aligned}$$

dépendant des paramètres m, a, b, c.
a) Pour quels valeurs de m ce système admet-il une solution unique ? Préciser alors, grâce aux formules de Cramer, les expressions de x, y en fonction de a, b, c et m.
b) Si $m = -2$, quelles relations doivent vérifier a, b, c pour que le système ait des solutions ? Résoudre le système lorsqu'elles sont satisfaites ?

Exercice 4. Considérons les matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Vérifier qu'on a $B = A + 4I_3$.
b) Trouver une formule liant B et B^2.
c) Trouver une relation entre A, A^2 et I_3.
d) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.