

Rattrapage du DS2

Exercice 1. Questions de cours.

1. Énoncer l'inégalité de Hölder dans le cadre des espaces L^p .
2. Énoncer le théorème de Fubini-Tonelli.

Exercice 2. Montrer qu'une fonction définie sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} , continue à support compact, appartient à tous les espaces $L^p(\mathbb{R})$ (pour la mesure de Lebesgue).

Exercice 3. On considère la fonction

$$f(t) = \int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{1+x^2} dx.$$

1. Montrer que f est définie, continue sur \mathbb{R} et que, pour $t \neq 0$,

$$f(t) = \frac{2}{t} \int_0^\infty \frac{x \sin tx}{(1+x^2)^2} dx.$$

2. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}^* .

Exercice 4. 1. Justifier l'existence de la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)^{1/n}}.$$

2. Calculer cette limite.