

**DS 2 bis**

**Exercice 1.** Questions de cours.

1. Énoncer l'inégalité de Hölder dans le cadre des espaces  $L^p$ .
2. Énoncer le théorème de Fubini-Tonelli.

**Exercice 2.** Montrer qu'une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , continue à support compact, appartient à tous les espaces  $L^p(\mathbb{R})$  (pour la mesure de Lebesgue).

**Exercice 3.** On considère la fonction

$$f(t) = \int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{1+x^2} dx.$$

1. Montrer que  $f$  est définie, continue sur  $\mathbb{R}$  et que, pour  $t \neq 0$ ,

$$f(t) = \frac{2}{t} \int_0^\infty \frac{x \sin tx}{(1+x^2)^2} dx.$$

2. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .

**Exercice 4.** 1. Justifier l'existence de la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)^{1/n}}.$$

2. Calculer cette limite.