Corrigé d'une version du DS 2

Exercice 1. Vrai ou faux ?
a) L'application suivante est linéaire : $f(x,y,z) = 2x + 3y - 6z + 12(y - x)$.
Vrai.
b) L'application suivante est linéaire : $f(x,y,z) = 3x + 2x^2 - 2xy + 3y - 6z + 2x(y - x)$.
Vrai, aussi. Il y avait un piège :

$$f(x,y,z) = 3x+2x^2-2xy+3y-6z+2x(y-x) = 3x+2x^2-2xy+3y-6z+2xy-2x^2 = 3x+3y-6z.$$

c) L'application suivante est homogène : $f(x,y) = 2xy - 3\sqrt{x}y^{3/2}$.
Vrai, aussi. Pour tout $t > 0$, on a :

$$f(tx,ty) = 2t^2xy - 3t^{1/2+3/2}\sqrt{x}y^{3/2} = t^2 f(x,y).$$

Exercice 2. Calculer les élasticités de la fonction suivante :

$$f(x,y,z) = \ln(x^2 + \sqrt{y} + \exp(z)).$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{f|x} &= \frac{x}{f}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\ln(x^2+\sqrt{y}+\exp(z))}.\frac{2x}{x^2+\sqrt{y}+\exp(z)},\\
\varepsilon_{f|y} &= \frac{y}{f}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\ln(x^2+\sqrt{y}+\exp(z))}.\frac{1/2.y^{-1/2}}{x^2+\sqrt{y}+\exp(z)},\\
\varepsilon_{f|z} &= \frac{z}{f}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\ln(x^2+\sqrt{y}+\exp(z))}.\frac{\exp(z)}{x^2+\sqrt{y}+\exp(z)}.
\end{aligned}$$

Exercice 3. Écrire la matrice symétrique associée à la forme quadratique suivante

$$Q(x,y,z,t) = x^2 - 2y^2 + 3xy + 2z^2 - 3xz - 2yx - zt - 8xt + t^2 - 3yt.$$

$$Q(x,y,z,t) = x^2 - 2y^2 + 2z^2 + t^2 + xy - 3xz - zt - 8xt - 3yt.$$

La matrice symétrique associée à Q est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -3/2 & -4 \\ 1/2 & -2 & 0 & -3/2 \\ -3/2 & 0 & 2 & -1/2 \\ -4 & -3/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Soit f une fonction homogène de degré α.
1) Écrire ce que ça signifie : $f(tx_1,\ldots,tx_n) = \ldots.$

$$f(tx_1,\ldots,tx_n) = t^\alpha f(x_1,\ldots,x_n).$$

2) Dériver de deux façons les deux membres de la question 1) par rapport à t. En déduire l'identité d'Euler (prendre une valeur particulière de t).
Première façon :

$$\frac{\partial}{\partial t}(t^\alpha f(x_1,\ldots,x_n)) = \alpha t^{\alpha-1} f(x_1,\ldots,x_n).$$

Deuxième façon :

$$\frac{\partial}{\partial t}(f(tx_1,\ldots,tx_n)) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial t}(tx_k).\frac{\partial f}{\partial x_k}(tx_1,\ldots,tx_n).$$

En $t = 1$, on obtient :

$$\alpha f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{k=1}^n x_k.\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1,\ldots,x_n).$$

Exercice 5. Considérons les fonctions suivantes :

$$x(u,v) = u^2 + v^2,\ y(u,v) = uv - v,\ z(u,v) = v^2 + u,$$

$$f(x,y,z) = x^5 - xy - 3z^2.$$

Posons $F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Calculer les dérivées partielles de F par rapport à u et v.
On utilise la règle de dérivation en chaîne :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial u} \\
&= (5x^4 - y).2u - x.v - 6z.1 \\
&= 2u(5(u^2+v^2)^4 - uv + v) - v(u^2+v^2) - 6(v^2+u).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial v} \\
&= (5x^4 - y).2v - x.(u-1) - 6z.2v \\
&= 2v(5(u^2+v^2)^4 - uv + v) - (u-1)(u^2+v^2) - 12v(v^2+u).
\end{aligned}$$