DS 2

Exercice 1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite, c'est-à-dire une fonction définie sur $\mathbb{N}$. Montrer que cette fonction est intégrable pour la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente.

Exercice 2. Soit Δ le domaine

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

1. Dessiner Δ.
2. Calculer
$$\int\int_\Delta \frac{e^{-xy}}{x} dxdy.$$
Énoncer le théorème de Fubini utilisé ; en vérifier les hypothèses. Pour calculer la valeur d'une intégrale intégrale généralisée, revenir à la définition vue pour l'intégrale de Riemann.

Exercice 3.

1. Montrer que la fonction de la variable réelle
$$x \mapsto \sin(tx)e^{-tx^2}$$
est intégrable sur $\mathbb{R}$ (pour la mesure de Lebesgue) lorsque $t \geq 0$.
2. Que vaut (pour $t \geq 0$)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(tx)e^{-tx^2}\ dx \ ?$$
Justifier soigneusement.
3. Pour $t \geq 0$, posons
$$F(t) = \int_0^{+\infty} \sin(tx)e^{-tx^2}\ dx.$$
Montrer que F est dérivable sur $]0,\infty[$ (énoncer le théorème de dérivation sous l'intégrale et l'appliquer). Donner une expression (intégrale) de sa dérivée.
4. La fonction F est-elle continue en 0 ?