

DS 1 (21 octobre)

Durée 55 minutes, calculatrices et documents interdits

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel. À quelles conditions une partie F de E est-elle un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 2. Calculer A^2 pour la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Une économie est structurée en trois secteurs 1, 2, 3. Chaque secteur utilise des consommations intermédiaires de production des autres pour travailler. Pour produire une unité, le secteur 1 utilise $1/2$ unité de production du secteur 2, $1/4$ du secteur 3. Pour produire une unité, le secteur 2 utilise $1/2$ unité de production du secteur 1, $1/2$ du secteur 3. Pour produire une unité, le secteur 3 utilise 0 unité de production du secteur 1, $1/4$ du secteur 2.

1. Donner la matrice de technologie (ou de Léontief) A associée à cette économie.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Expliquer pourquoi si les demandes en les produits des trois secteurs sont données dans un vecteur colonne D , alors la demande est satisfaite si les productions brutes sont données par

$$(I - A)^{-1}D.$$

3. Calculer $(I - A)^{-1}$ en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/4 & 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & -1/4 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -5/8 & 1 & 1/4 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 4/3 & 0 \\ 0 & 1 & -8/5 & -2/5 & 0 & -8/5 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/6 & 4/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & -19/15 & -16/15 & -4/3 & -8/5 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/6 & 4/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 16/15 & 20/15 & 24/15 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 118/114 & 96/114 & 24/114 \\ 0 & 1 & 0 & 54/57 & 20/57 & 8/57 \\ 0 & 0 & 1 & 16/19 & 20/19 & 24/19 \end{array} \right)$$

$$\frac{4}{3} + \frac{16}{15 \times 6} = \frac{4 \times 2 \times 19 + 16}{19 \times 6} = \frac{8 \times (20-1) + 16}{114} = \frac{8 \times 10 + 8}{114} = \frac{168}{114} = \frac{168}{114}$$

$$168 - 48 - 6 = \frac{3}{3} + \frac{20}{114} = 76 +$$

$$38 + 16 = 54$$

$$18 - 10 - 6 =$$

$$96 - 27 - 12 = 96 - 26 - 13 = 70 - 13 = 57.$$

$$-84 + 96 - 12 = 0.$$

on peut simplifier des fractions.