

DS 1 (21 octobre)

Durée 55 minutes, calculatrices et documents interdits

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel. À quelles conditions une partie F de E est-elle un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 2. Calculer A^2 pour la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Une économie est structurée en trois secteurs 1, 2, 3. Chaque secteur utilise des consommations intermédiaires de production des autres pour travailler. Pour produire une unité, le secteur 1 utilise $1/4$ unité de production du secteur 2, 0 du secteur 3. Pour produire une unité, le secteur 2 utilise $1/2$ unité de production du secteur 1, $1/4$ du secteur 3. Pour produire une unité, le secteur 3 utilise $1/2$ unité de production du secteur 1, $1/2$ du secteur 2.

1. Donner la matrice de technologie (ou de Léontief) A associée à cette économie.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Expliquer pourquoi si les demandes en les produits des trois secteurs sont données dans un vecteur colonne D , alors la demande est satisfaite si les productions brutes sont données par

$$(I - A)^{-1}D.$$

3. Calculer $(I - A)^{-1}$ en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 7/8 & -5/8 & 1/4 & 1 \\ 0 & -1/4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5/7 & 2/7 & 3/7 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -6/7 & 8/7 & 4/7 & 0 \\ 0 & 1 & -5/7 & 2/7 & 3/7 & 0 \\ 0 & 0 & -13/7 & -2/7 & -3/7 & -4 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -6/7 & 8/7 & 4/7 & 0 \\ 0 & 1 & -5/7 & 2/7 & 3/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4/23 & 9/23 & 18/23 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{196}{7 \times 23} & \frac{140}{7 \times 23} & \frac{161}{7 \times 23} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{56}{7 \times 23} & \frac{224}{7 \times 23} & \frac{140}{7 \times 23} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{23} & \frac{9}{23} & \frac{18}{23} \end{array} \right)$$

$$8 \times 23 + 12 = 174 + 12 = 186$$

$$4 \times 23 + 46 = 92 + 46 = 140$$

$$28 \times 6 = 168$$

$$28 \times 5 = 140$$

$$186 - 35 = 161$$

$$7 \times 23 = 161$$

$$-98 + 140 - 42 = 0$$

$$-28 + 224 - 35 = \frac{224}{63} - 161$$

$$\rightarrow 42 + 140$$

$$-28 - 112 + 140 = 0$$

$$-1 + 8 - 7 \quad -1 - 4 + 8 = 3$$

On peut simplifier des fractions
mais cette forme suffisait
pour avoir 4 points (et même
moins suffi