DS 1 (21 octobre)

Durée 55 minutes, calculatrices et documents interdits

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel. À quelles conditions une partie F de E est-elle un sous-espace vectoriel de E ?

2

Exercice 2. Calculer A^2 pour la matrice A suivante :

2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 7 \\ -5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Une économie est structurée en trois secteurs 1, 2, 3. Chaque secteur utilise des consommations intermédiaires de production des autres pour travailler. Pour produire une unité, le secteur 1 utilise 1/2 unité de production du secteur 2, 1/2 du secteur 3. Pour produire une unité, le secteur 2 utilise 1/2 unité de production du secteur 1, 1/4 du secteur 3. Pour produire une unité, le secteur 3 utilise 0 unité de production du secteur 1, 1/4 du secteur 2.

1. Donner la matrice de technologie (ou de Léontief) A associée à cette économie.

1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Expliquer pourquoi si les demandes en les produits des trois secteurs sont données dans un vecteur colonne D, alors la demande est satisfaite si les productions brutes sont données par

$$(I - A)^{-1}D.$$

2

X production brute

AX consommation intermédiaire.

$X - AX$ = production nette.

On veut $X - AX = D$ $(I-A)X = D$ $X = (I-A)^{-1}D$.

4

3. Calculer $(I - A)^{-1}$ en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/4 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & -1/4 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 4/3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/6 & 4/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 & 5/3 & 4/3 & 2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/6 & 4/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4/5 & 6/5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/2 & 4/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 8/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4/5 & 6/5 \end{array}\right)$$

2

Vérification : $$\begin{pmatrix} 3/2 & 4/5 & 1/5 \\ 1 & 8/5 & 2/5 \\ 1 & 4/5 & 6/5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/4 \\ -1/2 & -1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$