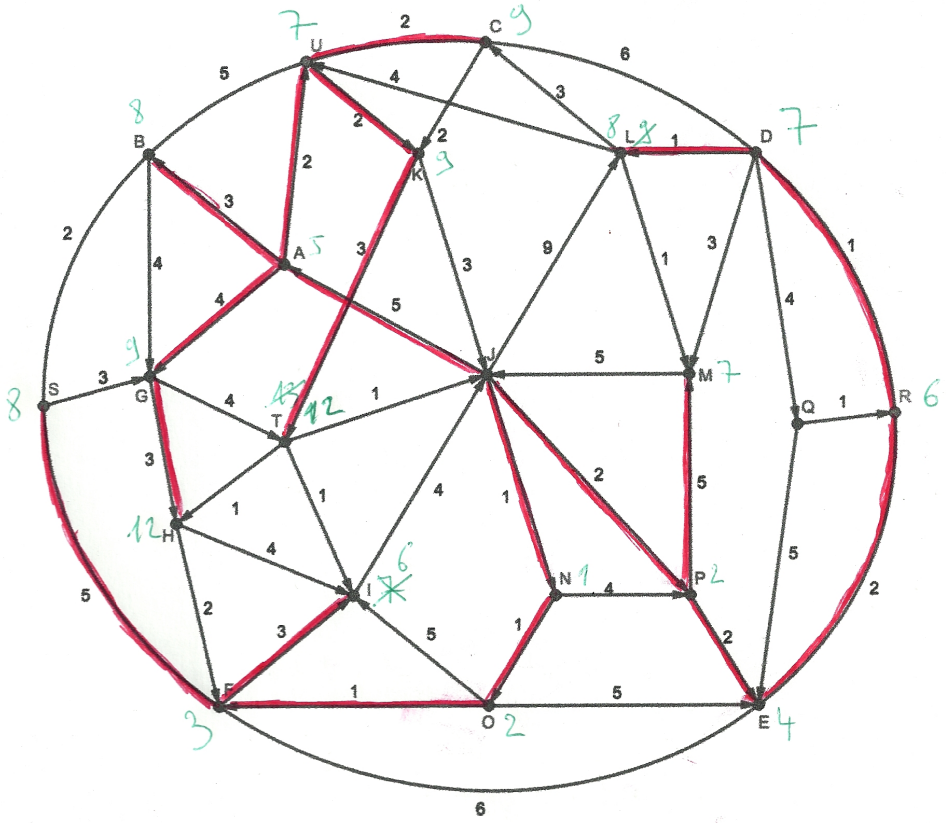
NOM : **PRÉNOM :**

Devoir 1 (14 février)

Durée 40 minutes, calculatrices et documents interdits

Exercice 1. Trouver les chemins les plus courts joignant **J** à tous les autres sommets du graphe ci-dessous. Les arêtes courbes (tracées sur l'ellipse extérieure) sont bidirectionnelles ; les arêtes droites (à l'intérieur de l'ellipse) sont unidirectionnelles (des flèches en indiquent les sens). Utiliser l'algorithme de Dijkstra.



NOM : **PRÉNOM :**

Exercice 2. On considère la région C de l'espace $\mathbb{R}^4$ définie par

$$C = \{x \in \mathbb{R}^4 \ / \ Ax \leq b\},$$

où A et b sont les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Donner la définition d'un ensemble convexe inclus dans $\mathbb{R}^d$.
2. Montrer que la région C de la question précédente est convexe dans $\mathbb{R}^4$.
3. Quel est le rang de la matrice A ? Quelle est la dimension de son noyau ? La région C contient-elle une droite ?

1. $C \subset \mathbb{R}^d$ est convexe si $\forall x, y \in C \ \forall \alpha \in [0,1]$
$\alpha x + (1-\alpha) y \in C$.

2. Soient $x, y \in C$, $\alpha \in [0,1]$
$Ax \leq b$ $Ay \leq b$. (car $x, y \in C$)
$A(\alpha x + (1-\alpha) y) = \alpha Ax + (1-\alpha) Ay \leq \alpha b + (1-\alpha) b = b$
par linéarité. car $\alpha \geq 0$ $1-\alpha \geq 0$.
on a bien $\alpha x + (1-\alpha) y \in C$.
cqfd.

3. Echelonnons la matrice A

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 + L_1 \\ L_4 - 4L_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 - L_2 \\ \\ \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 + L_3 \end{matrix}$$

3 pivots.

La matrice A est de rang 3. Or $\underset{\overset{\shortparallel}{3}}{rg(A)} + \dim \ker A = 4$

donc $\dim \ker A = 1$.

Oui la région C contient une droite. ($\ker A$ est une droite contenue dans C ; si $x \in \ker A$ $Ax = 0 \leq b$)