DS

Exercice 1. (*4 points*)

1. Énoncer le théorème de convergence monotone et le lemme de Fatou.
2. Démontrer le deuxième en utilisant le premier.

Exercice 2. (*3 points*)

1. Rappeler les propriétés de croissance et décroissance séquentielle d'une mesure.
2. Comparer $\mu(\limsup(A_n))$, $\limsup \mu(A_n)$, $\mu(\liminf(A_n))$, $\liminf \mu(A_n)$.

Exercice 3. (*3 points*)
On considère deux tribus définies sur l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

a. $\mathcal{A}$ la tribu engendrée par l'ensemble des singletons.
b. $\mathcal{B}$ la tribu engendrée par l'ensemble de toutes les parties de $\mathbb{Q}$ de la forme $]a, b[\cap\mathbb{Q}$ où a et b sont des réels avec $a < b$.

Comparer $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

Exercice 4. (*3 points*)
Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ intégrable pour μ. Considérons l'application ν définie sur $\mathcal{A}$ par

$$\nu(A) = \int_A f \ d\mu = \int_X f \mathbf{1}_A \ d\mu.$$

1. Montrer que ν est une mesure finie sur $(X, \mathcal{A})$.
2. Montrer que si $\mu(A) = 0$ alors $\nu(A) = 0$ aussi (traiter d'abord le cas où f est étagée puis le cas général).

Exercice 5. (*3 points*)
Soit f une fonction positive à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ continue et décroissante sur $[0, 1]$.

1. Pourquoi pour tout entier $n \geq 1$, la fonction $x \mapsto f(x^n)$ est-elle intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$?
2. On pose $u_n = \int_{[0,1]} f(x^n) \ \lambda(dx)$ où λ est la mesure de Lebesgue (on note habituellement $u_n = \int_0^1 f(x^n)dx$ cette intégrale). Quelle est la limite de u_n ?

Exercice 6. (*5 points*)
On admet que pour tout nombre réel t on a

$$e^t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}.$$

1. Pour x élément de $]0, 1]$ utiliser l'écriture ci-dessus pour écrire $1/x^x$ comme somme d'un série.
2. On pose $I(p, q) = \int_{]0,1]} x^p(\ln x)^q \ \lambda(dx)$. Calculer $I(p, 0)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, puis $I(p, q)$ (à partir de $I(p, 0)$ par récurrence sur q).
3. Montrer qu'on a

$$\int_{]0,1]} \frac{1}{x^x} \ \lambda(dx) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}.$$