DS 1

Exercice 1. (*3 points*)
Déterminer la nature des séries suivantes (discuter suivant les valeurs de α pour la première; justifier soigneusement les majorations utilisées, s'il y en a) :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}, \quad \sum_{n\geq 0} n^2 e^{-\sqrt{n}}.$$

Exercice 2. (*3 points*)

1. Si les ensembles A_n sont deux à deux disjoints que vaut $\limsup_n A_n$?
2. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels positifs. Comparer les nombres (ils peuvent être infinis)
$$\liminf_n (u_n+v_n) \quad \text{et} \quad \liminf_n u_n + \liminf_n v_n.$$
Donner un exemple où ces deux quantités ne sont pas égales.

Exercice 3. (*2 points*)
Décrire la tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par l'ensemble des singletons de $\mathbb{R}$ (donner la description et justifier le fait que c'est bien la tribu engendrée par les singletons).

Exercice 4. (*3 points*)
Montrer qu'une fonction monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est mesurable (on munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne).

Exercice 5. (*5 points*)
On considère la droite réelle complétée $\overline{\mathbb{R}}$. On note $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ les tribus boréliennes de $\overline{\mathbb{R}}$ et $\mathbb{R}$ respectivement, on munit $\mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R}}$ de ces deux tribus.

1. Décrire la tribu $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ à partir de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (justifier). En déduire que $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ n'est pas engendrée par les intervalles de la forme $]a,b[$ avec a et b dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\overline{\mathbb{R}}$ est engendrée par la famille des intervalles $]\alpha,+\infty]$, avec $\alpha\in\mathbb{R}$.
2. L'injection canonique i de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ qui à x associe x est-elle mesurable ?
3. On considère (f_n) une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurables pour $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour tout n on note $\overline{f_n}$ la composée $i\circ f_n$. Les fonctions $\overline{f_n}$ sont-elles mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$?
4. Montrer que l'ensemble $(\sup_n \overline{f_n})^{-1}(\{+\infty\})$ est un borélien de $\mathbb{R}$.

Exercice 6. (*5 points*)
Soient $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré et T une application mesurable de $(X,\mathcal{A})$ dans lui-même. On suppose que la mesure μ est finie et que T préserve la mesure μ c'est-à-dire que, pour tout $A\in\mathcal{A}$, on a

$$\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A).$$

On note les itérés de T en utilisant des exposants :

$$T^1(x) = T(x) \quad T^2(x) = T(T(x)) \quad T^3(x) = T(T(T(x))) \quad \text{etc...}$$

Soit B un élément de $\mathcal{A}$. On pose

$$B_0 = \{x\in B \;/\; \forall n>0 \; T^n(x)\notin B\}$$

$$B_n = T^{-n}B_0 = \{x\in X \;/\; T^n(x)\in B_0\}$$

(autrement dit B_n est l'image réciproque de B_0 par T^n).

1. Montrer que les ensembles B_n sont mesurables.
2. Montrer que les ensembles B_n sont disjoints. Que vaut $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} B_n)$?
3. Que valent les nombres $\mu(B_n)$? En déduire que $\mu(B_0) = 0$ (relire les hypothèses si nécessaire).