Devoir de révision

À remettre sur Cursus entre les 19 et 24 septembre

Exercice 1. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ -2 & 0 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, et $Z = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer tous les produits matriciels qui ont un sens.

Exercice 2. Un magazin vend deux types d'articles. Lorsque leurs prix unitaires sont P_1 et P_2, les quantités demandées pour chaque produit, D_1 et D_2, et les quantités disponibles de chaque produit (l'offre), S_1 et S_2, sont reliées par les équations

$$D_1 = 70 - 2P_1 + P_2, \quad D_2 = 105 + P_1 - P_2$$
$$S_1 = -14 + 3P_1, \quad S_2 = -7 + 2P_2.$$

1. Les deux articles sont-ils en compétition (comme deux modèles de petites voitures électriques) ou sont-ils complémentaires (tels une chemise et une cravate) ?
2. Trouvez les prix d'équilibre de chaque produit, c'est-à-dire ceux pour lesquels l'offre et la demande sont égales.

Exercice 3. « Un coq vaut cinq pièces, une poule trois pièces et trois poussins une pièce. Avec 100 pièces, on veut acheter 100 volatiles. Combien de coqs, poules et poussins pouvons nous acheter ?» (*Chine, 5eme siècle*)

Le dernier exercice est plus théorique. Je vous conseille de commencer par le cas où $n = 2$ (vous pouvez même vous contenter de ce cas). Essayez de faire les dernières questions même si vous n'avez pas fait celles qui précèdent.

Exercice 4. Soit A une matrice carrée $n \times n$ ($n \geq 2$) dont les coefficients sont tous strictement positifs et telle que les sommes des éléments des colonnes soient égales à 1. Notons d le plus petit coefficient de A.

1. Montrer que d est inférieur ou égal à $1/2$.
2. Pour tout Y vecteur $1 \times n$ dont les coefficients sont positifs ou nuls, notons $m(Y)$ le plus petit coefficient de Y, $M(Y)$ le plus grand. Montrer que, pour tout Y vecteur ligne positif ou nul, on a
$$M(YA) - m(YA) \leq (1 - 2d)(M(Y) - m(Y)).$$
Que se passe-t-il si A est une matrice 2×2 dont tous les coefficients valent $1/2$?
3. En déduire que YA^n converge vers un vecteur ligne dont toutes les coordonnées sont égales entre elles.
4. En déduire que A^n converge vers une matrice dont toutes les colonnes sont égales, puis que l'équation $AX = X$ a une solution X positive.