

## Les fonctions de plusieurs variables (suite)

Comme  $|x - x'| \leq \|(x, y) - (x', y')\|$  et  $|y - y'| \leq \|(x, y) - (x', y')\|$ , les applications définies par  $(x, y) \mapsto x$ ,  $(x, y) \mapsto y$  sont continues sur  $\mathbb{R}^2$ .

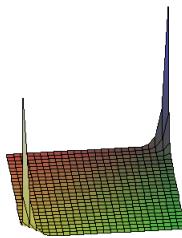
D'après le théorème précédent les applications définies par  $(x, y) \mapsto x + y$ ,  $(x, y) \mapsto xy$ , puis  $(x, y) \mapsto x^2 + 3xy$  et toutes les fonctions polynôme en deux variables  $x$  et  $y$  sont continues sur  $\mathbb{R}^2$ .

De la même façon toutes les fractions rationnelles en deux variables sont continues là où elles sont définies.

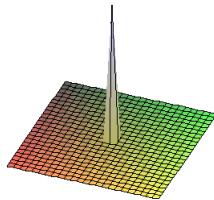
Plus généralement les polynômes en  $n$  variables sont continus, les fractions rationnelles en  $n$  variables sont continues là où elles sont définies.

### Autres exemples

$f(x, y) = e^{xy}$  continue sur  $\mathbb{R}^2$



$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  continue sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$



Remarque : vous voyez qu'il n'est pas évident à la vue des deux images précédentes de deviner que la première fonction est continue sur  $\mathbb{R}^2$  et l'autre non.

# 1 Fonctions continues sur un ensemble compact

**Théorème 1.1.** Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  (avec  $X$  compact non vide) continue. Alors :

- (i)  $f$  est bornée sur  $X$ .
- (ii)  $f$  atteint ses bornes inférieure et supérieure.

Démonstration Utilisons encore les suites. Supposons que  $f$  ne soit pas bornée. Alors on peut trouver une suite  $(x_k)$  telle que  $(f(x_k))$  tende vers  $+\infty$  ou  $-\infty$ . Considérons par exemple le cas où  $(f(x_k))$  tend vers  $+\infty$ . Comme  $X$  est compact, il existe une sous-suite  $(x_{k_l})_l$  convergeant vers un point  $x$  de  $X$ . On a alors  $\lim_l f(x_{k_l}) = +\infty$  et  $\lim_l f(x_{k_l}) = f(x)$  (par continuité de  $f$ ). Contradiction. L'hypothèse faite est absurde :  $f$  est bornée.

Reste à montrer qu'elle atteint ses bornes. On procède de manière analogue. Montrons le pour la borne inférieure.

Il existe une suite  $(x_k)$  telle que  $(f(x_k))$  tende vers  $\inf_X f$ .  $X$  est compact, il existe une sous-suite  $(x_{k_l})_l$  convergeant vers un point  $x$  de  $X$ . On a alors  $\lim_l f(x_{k_l}) = \inf_X f$  et  $\lim_l f(x_{k_l}) = f(x)$  (par continuité de  $f$ ). Conclusion :  $f(x) = \inf_X f$ , autrement dit  $\inf_X f$  est atteinte.  $\square$

**Définition 1.2.**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est uniformément continue si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tel que  $\|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

**Théorème 1.3.** Soit  $f$  continue de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  avec  $X$  compact. Alors  $f$  est uniformément continue sur  $X$ .

Démonstration Nous allons raisonner par l'absurde. Considérons une fonction  $f$  continue sur un ensemble compact  $X$ . Supposons que  $f$  ne soit pas uniformément continue. Alors la phrase

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

est fausse, c'est-à-dire que

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0 \exists x, y \text{ avec } \|x - y\| < \delta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

En particulier pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on peut trouver  $x_n$  et  $y_n$  deux points de  $X$  distants de moins de  $1/n$  tels que  $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ . On obtient ainsi deux suites d'éléments de  $X$ . Comme  $X$  est compact, on peut extraire de la suite  $(x_n)$  une sous-suite convergente. Soient  $(x_{n_k})_k$  une telle suite et  $x_*$  sa limite. Alors  $(y_{n_k})_k$  converge aussi vers  $x_*$  car  $\|x_{n_k} - y_{n_k}\| < 1/n_k$ . Comme  $f$  est continue en  $x_*$  on a  $\lim_k f(x_{n_k}) = \lim_k f(y_{n_k}) = f(x_*)$ . Mais par construction on a aussi, pour tout  $k$ ,  $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$ . Contradiction.  $\square$

## Dérivées des fonctions de plusieurs variables

Les fonctions de plusieurs variables sont des fonctions de chacune de leurs variables. Si elles sont dérivables par rapport à chaque variables comme fonctions d'une variable alors elles admettent des dérivées partielles. Le calcul des dérivées partielles se fait donc comme le calcul des dérivées des fonctions réelles de la variable réelles (les autres variables sont considérées comme des constantes). Mais en dimension supérieure, dire qu'une fonction est dérivable, n'est pas seulement dire qu'elle a des dérivées partielles. On dit qu'une fonction  $f$  est dérivable ou différentiable en un point si elle a une bonne approximation linéaire (ou affine) en ce point. Lorsque  $f$  et  $g$  sont dérивables alors les propriétés habituelles sont vérifiées. Mais  $f'(x)$  n'est pas un nombre mais une matrice. Dans la formule de la dérivation des fonctions composées par exemple l'ordre a alors une grande importance.

Remarque : on écrit la plupart du temps on écrit les variables d'une fonction à plusieurs variables en ligne mais dans l'écriture du développement de Taylor on considère des vecteurs colonnes.

## 2 Dérivées partielles des fonctions à valeurs réelles

### 2.1 Rappels

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . La dérivée de  $f$  en  $x$ , si elle existe, est :  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ .

### 2.2 Dérivée partielle

**Définition 2.1.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . On définit la dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $x_i$  par

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$$

si cette limite existe.

#### Notation

Cela se note  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $f_{x_i}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $D_i f(x_1, \dots, x_n)$ .

Dans le cas de deux variables on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k}$$

**Exercice** Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes (aux points où elles existent) :

- 
- (1)  $f(x, y) = e^{xy^2}$   
 (2)  $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 2xy$   
 (3)  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$   
 (4)  $f(x, y, z) = xy^2 + z$

## 2.3 Interprétation géométrique

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  est la pente de la tangente à la courbe  $z = f(x, y_0)$  en  $(x_0, y_0)$ .

## 2.4 Gradient

**Définition 2.2.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction ayant des dérivées partielles.

Son gradient en  $P$ , noté  $\text{Grad}(f)(P)$  est le vecteur colonne dont le vecteur transposé est donné par  ${}^t\text{Grad}(f)(P) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right)$ .

### Exercice

Calculer les gradients de :

- (1)  $f(x, y) = x^2 y^3$   
 (2)  $f(x, y, z) = x^2 \sin(yz)$

### Remarque

Le gradient peut être considéré comme un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  mais aussi comme une matrice  $1 \times n$ .

**Théorème 2.3.** Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  avec des gradients, alors :

- (i)  $\text{Grad}(f + g) = \text{Grad}(f) + \text{Grad}(g)$   
 (ii)  $\text{Grad}(cf) = c \text{Grad}(f)$  où  $c \in \mathbb{R}$

## 2.5 Dérivées partielles et continuité

Une fonction peut avoir des dérivées partielles sans être continue !!

### Exemples

- (1)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$
 a des dérivées partielles en  $(0, 0)$  mais n'y est pas continue.

$$(2) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{en } (0, 0) \end{cases}$$

admet des dérivées partielles en tout point mais n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

Pour "dépasser" cette difficulté, on définit la différentielle (ou dérivée totale) ou on considère les fonctions ayant des dérivées partielles continues encore appelées fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ .

## 2.6 Dérivées partielles successives

Les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$  sont des fonctions de  $x_1, \dots, x_n$ , et il arrive souvent qu'elles sont eux-mêmes dérивables.

**Définition 2.4.** On écrit, lorsqu'elle existe,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$  et on dit qu'il s'agit d'une **dérivée partielle seconde** de  $f$ .

### Exemple

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto x^3y^4$ . Alors  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 12x^2y^3 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ .

### Théorème 2.5. (Schwarz)

Si les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  existent et sont continues dans une boule autour de  $(a_1 \dots a_n)$  alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$