Les fonctions de plusieurs variables (suite)

1 Etude de certaines surfaces quadratiques

On cherche à étudier les polynômes quadratiques de la forme $z = Lx^2 + 2Mxy + Ny^2$.

Pour ce faire nous allons utiliser l'identité remarquable vue au collège : $(x+\alpha)^2 = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2$ en écrivant quand il le faudra $x^2 + 2\alpha x = (x+\alpha)^2 - \alpha^2$. Si L n'est pas nul, on peut écrire

$$\begin{aligned} Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 &= L(x^2 + 2Mxy/L + Ny^2/L) \\ &= L((x + My/L)^2 - M^2y^2/L^2 + Ny^2/L) \\ &= L((x + My/L)^2 + (NL - M^2)y^2/L^2). \end{aligned}$$

Ceci permet de voir que si $NL - M^2$ est strictement positif alors dans la parenthèse on trouve la somme de deux carrés et le graphe est un paraboloïde elliptique ("tourné" vers le haut si $L > 0$, vers le bas si $L < 0$). Si $NL - M^2$ est strictement négatif alors dans la parenthèse on trouve la différence de deux carrés et le graphe est un paraboloïde hyperbolique.
Si N n'est pas nul, en procédant de la même façon, on peut écrire

$$\begin{aligned} Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 &= N(Lx^2/N + 2Mxy/N + y^2) \\ &= N(Lx^2/N + (y + Mx/N)^2 - M^2x^2/N^2) \\ &= N((LN - M^2)x^2/N^2 + (y + Mx/N)^2). \end{aligned}$$

On obtient que si $LN - M^2$ est strictement positif alors le graphe est un paraboloïde elliptique ("tourné" vers le haut si $N > 0$, vers le bas si $N < 0$). Si $NL - M^2$ est strictement négatif alors dans la parenthèse on trouve la différence de deux carrés et le graphe est un paraboloïde hyperbolique.
Dans le cas où L et N ne sont pas nuls tous les deux, ces deux façons de faire donne bien les mêmes résultats. En effet, si $LN - M^2$ est strictement positif alors en particulier $LN > 0$ autrement dit L et N ont le même signe (l'orientation du paraboloïde elliptique est bien déterminée de la même façon).
Si L et N sont tous les deux nuls, et M est différent de 0, alors le graphe est un paraboloïde hyperbolique. Pour le voir il suffit d'écrire (encore une identité remarquable !) :

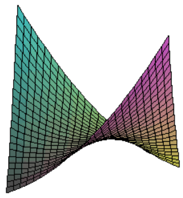
$$2Mxy = M(x+y)^2/2 - M(x-y)^2/2.$$

Quelque soit le signe de M nous avons une différence de deux carrés.
Enfin reste le cas où $LN - M^2$ est nul. On a alors

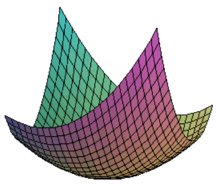
$$Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 = L(x + My/L)^2$$

(quand $L \neq 0$ par exemple), et le graphe est un cylindre parabolique.

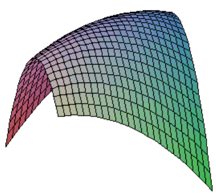
Exemples :
• $2x^2 - 6xy + y^2$
On calcule $2.1 - 3^2 = -7 < 0$. Le graphe est un paraboloïde hyperbolique :



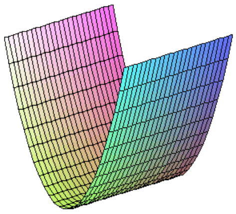
• $2x^2 - 2xy + 3y^2$
On calcule $2.3 - 2^2 = 2 > 0$ et $2 > 0$. Le graphe est un paraboloïde elliptique tourné vers le haut :



• $-x^2 + 2xy - 3y^2$
On calcule $(-1).(-3) - 1^2 = 1 > 0$ et $-1 < 0$. Le graphe est un paraboloïde elliptique tourné vers le bas :



• $x^2 + 2xy + y^2$
On calcule $1.1 - 1^2 = 0$. Le graphe est un cylindre parabolique :

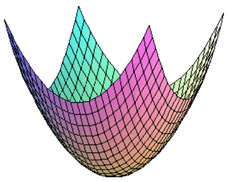


Remarque : comme vous le voyez, il n'est pas toujours facile de reconnaître un paraboloïde hyperbolique ou un paraboloïde elliptique sur l'image donnée par l'ordinateur.

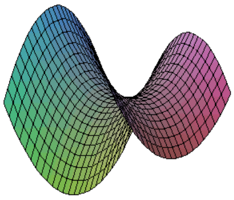
Proposition 1.1. *Il existe des coordonnées orthogonales X , Y , Z dans lesquelles $Z = k_1\, X^2 + k_2\, Y^2$.*

2 Représentation géométrique

- Cas d'une fonction de deux variables $f(x\,,\,y)$
  a) On considère le graphe $G(f) = \{((x\,,\,y)\,,\,f(x\,,\,y))\,/\,(x\,,\,y) \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
  Exemples : $f(x\,,\,y) = x^2 + y^2$.
  Le graphe est un paraboloňïde de révolution.

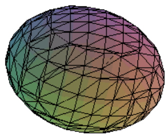


  Le graphe $f(x\,,\,y) = y^2 - x^2$ est un paraboloïde hyperbolique :

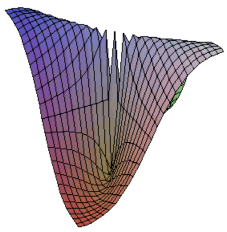


  b) On considère les courbes de niveau $\{(x\,,\,y) \in D\,/\,f(x\,,\,y) = C\}$.
  Dans l'exemple précédent, les courbes de niveau sont les cercles $\{(x\,,\,y)\,/\,x^2 + y^2 = C \geqslant 0\}$.

- Cas d'une fonction de plus de deux variables
  Le graphe étant dans $\mathbb{R}^4$, on ne peut le dessiner.
  Si $n = 3$, on utilise les surfaces de niveau $\{(x\,,\,y\,,\,z) \in D \,/\, f(x\,,\,y\,,\,z) = C\}$.
  Par exemple la surface de niveau 5 de la fonction $f(x\,,\,y\,,\,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$ ressemble à peu près à



Remarque : il arrive qu'un logiciel ne donne pas de représentation fidèle de ce qui se passe au voisinage d'un point. Par exemple il est difficile de se rendre compte de ce qui se passe au voisinage de $(0, 0)$ pour la fonction définie par $f(x\,,\,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ en regardant l'image ;



3 Fonctions continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Définition 3.1. *Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ (où $D \subset \mathbb{R}^n$) a pour limite b en x_0 si $x_0 \in \overline{D}$ et si $\forall \varepsilon > 0\,,\, \exists \delta > 0$ tel que :*

$$x \in D \quad , \quad \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Notation
Dans ce cas $b = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Définition 3.2. *(i) $f : D \to \mathbb{R}$ est* **continue en** *$x_0 \in D$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

(ii) f est **continue sur** *D si et seulement si elle est continue en tout point de D.*

Théorème 3.3. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) f *est continue sur* $\mathbb{R}^n$.

(ii) $\forall b \in \mathbb{R}^n$, $\forall x_p$ *avec* $x_p \to b$ *on a :* $f(x_p) \to f(b)$ *dans* $\mathbb{R}$.

(iii) $\forall \theta$ *ouvert de* $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\theta) = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, f(x) \in \theta\}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^n$.

(iv) $\forall F$ *fermé de* $\mathbb{R}$, $f^{-1}(F) = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, f(x) \in F\}$ *est un fermé de* $\mathbb{R}^n$.

Remarque
Si $D \neq \mathbb{R}^n$, il faut modifier les points (iii) et (iv), et dire que $f^{-1}(\theta)$ est un ouvert de D et $f^{-1}(F)$ est un fermé de D.
Démonstration Commençons par remarquer que l'équivalence de (iii) et (iv) est une conséquence directe de l'égalité
$$f^{-1}({}^cE) = {}^c f^{-1}(E),$$
valable pour toute partie E de $\mathbb{R}$. Supposons $f^{-1}(E)$ est ouvert quand E est ouvert et donnons-nous un fermé F. Alors ${}^cF$ est ouvert, donc $f^{-1}({}^cF)$ est ouvert. Mais comme $f^{-1}({}^cF) = {}^c f^{-1}(F)$ cela signifie que ${}^cf^{-1}(F)$ est ouvert, autrement dit que $f^{-1}(F)$ est fermé.
On procède de façon analogue pour l'autre implication.

(i)$\Rightarrow$(ii) : On se donne une fonction f continue et une suite (x_k) convergeant vers b et il s'agit de montrer que $(f(x_k))$ converge vers $f(b)$. Écrivons les définitions de l'hypothèse et de ce que nous cherchons à démontrer.
Hypothèses :
– Convergence de la suite (x_k) : $\forall \epsilon > 0\ \exists K\ \forall k > K\ d(x_k, b) < \epsilon$.
– Continuité de la fonction (en b) : $\forall \alpha > 0\ \exists \delta > 0\ (d(x, b) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(b)| < \alpha)$.
À montrer :
– Convergence de la suite $(f(x_k))$: $\forall \epsilon > 0\ \exists K\ \forall k > K\ d(f(x_k), f(b)) < \epsilon$.
Soit $\epsilon > 0$. Prenons $\delta > 0$ pour que si $d(x, b) < \delta$ alors $|f(x) - f(b)| < \epsilon$ (c'est possible grâce à la deuxième hypothèse). Prenons ensuite K tel que si $k > K$ alors $d(x_k, b) < \delta$ (c'est possible grâce à la première hypothèse). Alors si $k > K$ on a $d(x_k, b) < \delta$, donc $|f(x_k) - f(b)| < \epsilon$.

(ii)$\Rightarrow$(iv) : On suppose que (ii) est vraie et on cherche à montrer qu'alors (iv) est vraie. Soit F un fermé. On veut montrer que $f^{-1}(F)$ est fermé. Autrement dit on veut montrer que toute suite convergente d'éléments de $f^{-1}(F)$ a sa limite dans $f^{-1}(F)$. Soit (x_k) une telle suite, x sa limite. Comme (ii) est vraie, $(f(x_k))_k$ converge vers $f(x)$. D'autre part, pour tout k, x_k appartient à $f^{-1}(F)$. Autrement dit, pour tout k, $f(x_k)$ appartient à F. Mais F est fermé donc toute suite convergente d'éléments de F a sa limite dans F. Or $(f(x_k))_k$ converge vers $f(x)$. On a donc $f(x) \in F$ soit encore $x \in f^{-1}(F)$, ce qu'on voulait montrer.

(iii)⇒(i) : On suppose que (iii) est vraie et on cherche à montrer qu'alors (i) est vraie.
À montrer : $\forall b \in \mathbb{R}^n,\ \forall \alpha > 0\ \exists \delta > 0\ (d(x,b) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(b)| < \alpha)$.
Soient $b \in \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$. L'intervalle $]f(b) - \alpha, f(b) + \alpha[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Par (iii) $f^{-1}(]f(b) - \alpha, f(b) + \alpha[)$ est un ensemble ouvert (auquel b appartient évidemment). Dire que cet ensemble est ouvert, c'est en particulier, dire qu'il existe $\delta > 0$ tel que, $B(b,\delta) \subset f^{-1}(]f(b) - \alpha, f(b) + \alpha[)$. Mais cette inclusion signifie que si $d(x,b) < \delta$ alors $|f(x) - f(b)| < \alpha$. C'est ce que nous voulions montrer.$\square$

Théorème 3.4. *Si f et g sont continues alors $f+g$, fg , $\dfrac{f}{g}$ et $f \circ g$ sont continues lorsqu'elles sont définies.*

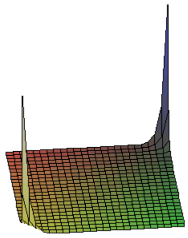
Remarque : lorsqu'on ne précise pas continu en tel ou tel point, il faut comprendre continu en tout point de l'ensemble où la fonction est définie.
Démonstration Le plus simple est peut-être d'utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité : nous avons à montrer que, pour tout point x en lequel f et g sont définies, pour toute suite $(y_k)_k$ convergeant vers x, les suites $(f(y_k) + g(y_k))_k$, $(f(y_k)g(y_k))_k$, $(f(y_k)/g(y_k))_k$ convergent respectivement vers $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(x)/g(x)$. Par hypothèse f et g sont continues donc $(f(y_k)$ et $g(y_k))_k$ tendent vers $f(x)$ et $g(x)$. Or, on sait que si deux suites de nombres réels $(u_k)_k$, $(v_k)_k$ tendent vers l et l' alors les suites $(u_k + v_k)_k$, $(u_k.v_k)_k$, $(u_k/v_k)_k$convergent respectivement vers $l + l'$, ll', l/l'. Il suffit donc d'appliquer ce résultat pour $u_k = f(y_k)$ et $v_k = g(y_k)$.

Il y a quand même un petit problème avec le quotient quand $g(x)$ vaut 0. Ce n'est pas parce que $g(x)$ vaut 0 que le quotient n'a pas de limite en x ; cela peut arriver mais dépend des fonctions considérées. Ce qui est sûr en revanche c'est que si $g(x)$ n'est pas nul, alors le quotient f/g est continu en x. Il faut être plus précis dans ce cas. Si $g(x)$ n'est pas nul, alors comme $(g(y_k))_k$ tend vers $g(x)$, à partir d'un certain rang $g(y_k)$ est différent de 0, le quotient $(f(y_k)/g(y_k))_k$ est alors défini à partir d'un certain rang et tend vers $f(x)/g(x)$.

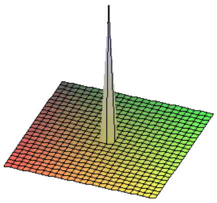
Manque la démonstration pour la composition.$\square$

Exemple d'application de ce résultat Comme $|x - x'| \le \|(x,y) - (x',y')\|$ et $|y - y'| \le \|(x,y) - (x',y')\|$, les applications définies par $(x,y) \mapsto x$, $(x,y) \mapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
D'après le théorème précédent les applications définies par $(x,y) \mapsto x + y$, $(x,y) \mapsto xy$, puis $(x,y) \mapsto x^2 + 3xy$ et toutes les fonctions polynôme en deux variables x et y sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
De la même façon toutes les fractions rationnelles en deux variables sont continues là où elles sont définies.

Autres exemples
$f(x\,,\,y) = e^{xy}$ continue sur $\mathbb{R}^2$



$f(x\,,\,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$



Remarque : vous voyez qu'il n'est pas évident à la vue des deux images précédentes de deviner que la première fonction est continue sur $\mathbb{R}^2$ et l'autre non.