L'espace $\mathbb{R}^n$ (fin)

0.1 Ensembles compacts

Définition 0.1. *$X \subset \mathbb{R}^n$ est compact si X est fermé et borné (borné veut dire qu'il existe $R > 0$ tel que $X \subset B(0\,,\,R)$).*

Exemples
$[0, 23]$ est un compact dans $\mathbb{R}$.
$\{(x, y)\ /x^2 + (y-2)^2 \leq 6\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.
$[2, 3] \times [1, 3] \times [5, 7]$ est un compact dans $\mathbb{R}^3$.

Théorème 0.2. *(Bolzano-Weierstrass)*
Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ compact. Alors toute suite $(x_k) \subset X$ contient une sous-suite (x_{l_k}) qui converge vers un point de X.

Les fonctions de plusieurs variables

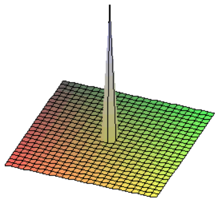
1 Fonctions de plusieurs variables

1.1 Définitions

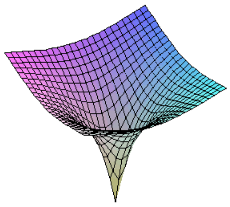
Définition 1.1. *Une fonction f définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (où D est un) s'appelle fonction numérique de n variables.*
D est le domaine de définition de f.
$\{f(x)\,/\,x \in D\}$ est l'image de f.
$\{(x\,,\,f(x))\,/\,x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ est appelé graphe de f.

Exemples [1]
$f(x\,,\,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

1. Les images données sont obtenues avec le logiciel Maple.



$f(x\,,\,y\,,\,z) = Ln(1 + x^2 + y^2)$



Définition 1.2. *Soient D et E deux parties de $\mathbb{R}^n$ telles que $D \subset E$ et f et g deux fonctions définies respectivement sur D et E. On dit que g est un prolongement de f à E si pour tout $x \in D$ on a $f(x) = g(x)$. Dans cette situation, on dit aussi que f est la restriction de g à D.*

Définition 1.3. *Soient D une partie de $\mathbb{R}^n$, f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in D$.*
On dit que f est majorée sur D s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D$ on ait $f(x) \leq M$.
On dit que f est minorée sur D s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D$ on ait $f(x) \geq m$.
On dit que f est bornée sur D si elle est à la fois majorée et minorée. Cela revient à dire qu'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in D$ on ait $|f(x)| \leq M$.
On dit que f a un minimum local en x_0 s'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in B(x_0, r)$ on a $f(x) \geq f(x_0)$.
On dit que f a un maximum local en x_0 s'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in B(x_0, r)$ on a $f(x) \leq f(x_0)$.
On dit que f a un minimum local strict en x_0 s'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in B(x_0, r)$, $x \neq x_0$, on a $f(x) > f(x_0)$.
On dit que f a un maximum local strict en x_0 s'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in B(x_0, r)$, $x \neq x_0$, on a $f(x) < f(x_0)$.
On dit que f a un minimum en x_0 si pour tout $x \in D$ on a $f(x) \geq f(x_0)$.
On dit que f a un maximum en x_0 si pour tout $x \in D$ on a $f(x) \leq f(x_0)$.
On dit que f a un minimum strict en x_0 si pour tout $x \in D$, $x \neq x_0$, on a $f(x) > f(x_0)$.
On dit que f a un maximum strict en x_0 si pour tout $x \in D$, $x \neq x_0$, on a $f(x) < f(x_0)$.

Définitions
Soient D une partie de $\mathbb{R}^n$, f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Si f est majorée, on appelle borne supérieure de f sur D le nombre réel noté $\sup_D f$ ou $\sup_{x\in D} f(x)$ défini par :

$$\forall x \in D \quad f(x) \leq \sup_D f, \ \ \forall M < \sup_D f, \ \exists x \in D, \ f(x) > M.$$

Si f est minorée, on appelle borne inférieure de f sur D le nombre réel noté $\inf_D f$ ou $\inf_{x\in D} f(x)$ défini par :

$$\forall x \in D \quad f(x) \geq \inf_D f, \ \ \forall m > \inf_D f, \ \exists x \in D, \ f(x) < m.$$

Si f est majorée sur D, on dit que f atteint sa borne supérieure s'il existe $x \in D$ tel que $f(x) = \sup_D f$. On écrit alors $\max_D f$ à la place de $\sup_D f$.
Si f est minorée sur D, on dit que f atteint sa borne inférieure s'il existe $x \in D$ tel que $f(x) = \inf_D f$. On écrit alors $\min_D f$ à la place de $\inf_D f$.

1.2 Etude de certaines surfaces quadratiques

On cherche à étudier les polynômes quadratiques de la forme $z = Lx^2 + 2Mxy + Ny^2$.

Pour ce faire nous allons utiliser l'identité remarquable vue au collège : $(x+\alpha)^2 = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2$ en écrivant quand il le faudra $x^2 + 2\alpha x = (x+\alpha)^2 - \alpha^2$. Si L n'est pas nul, on peut écrire

$$\begin{aligned} Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 &= L(x^2 + 2Mxy/L + Ny^2/L) \\ &= L((x + My/L)^2 - M^2y^2/L^2 + Ny^2/L) \\ &= L((x + My/L)^2 + (NL - M^2)y^2/L^2). \end{aligned}$$

Ceci permet de voir que si $NL - M^2$ est strictement positif alors dans la parenthèse on trouve la somme de deux carrés et le graphe est un paraboloïde elliptique ("tourné" vers le haut si $L > 0$, vers le bas si $L < 0$). Si $NL - M^2$ est strictement négatif alors dans la parenthèse on trouve la différence de deux carrés et le graphe est un paraboloïde hyperbolique.
Si N n'est pas nul, en procédant de la même façon, on peut écrire

$$\begin{aligned} Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 &= N(Lx^2/N + 2Mxy/N + y^2) \\ &= N(Lx^2/N + (y + Mx/N)^2 - M^2x^2/N^2) \\ &= N((LN - M^2)x^2/N^2 + (y + Mx/N)^2). \end{aligned}$$

On obtient que si $LN - M^2$ est strictement positif alors le graphe est un paraboloïde elliptique ("tourné" vers le haut si $N > 0$, vers le bas si $N < 0$). Si $NL - M^2$ est

strictement négatif alors dans la parenthèse on trouve la différence de deux carrés et le graphe est un paraboloïde hyperbolique.
Dans le cas où L et N ne sont pas nuls tous les deux, ces deux façons de faire donne bien les mêmes résultats. En effet, si $LN - M^2$ est strictement positif alors en particulier $LN > 0$ autrement dit L et N ont le même signe (l'orientation du paraboloïde elliptique est bien déterminée de la même façon).
Si L et N sont tous les deux nuls, et M est différent de 0, alors le graphe est un paraboloïde hyperbolique. Pour le voir il suffit d'écrire (encore une identité remarquable !) :

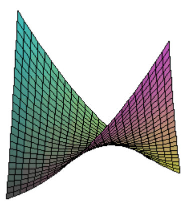
$$2Mxy = M(x+y)^2/2 - M(x-y)^2/2.$$

Quelque soit le signe de M nous avons une différence de deux carrés.
Enfin reste le cas où $LN - M^2$ est nul. On a alors

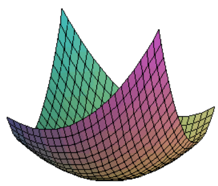
$$Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 = L(x + My/L)^2$$

(quand $L \neq 0$ par exemple), et le graphe est un cylindre parabolique.

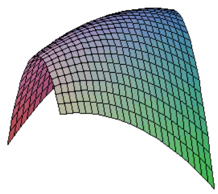
Exemples :
• $2x^2 - 6xy + y^2$
On calcule $2.1 - 3^2 = -7 < 0$. Le graphe est un paraboloïde hyperbolique :



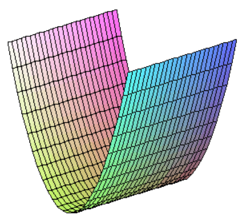
• $2x^2 - 2xy + 3y^2$
On calcule $2.3 - 2^2 = 2 > 0$ et $2 > 0$. Le graphe est un paraboloïde elliptique tourné vers le haut :



• $-x^2 + 2xy - 3y^2$
On calcule $(-1).(-3) - 1^2 = 1 > 0$ et $-1 < 0$. Le graphe est un paraboloïde elliptique tourné vers le bas :



• $x^2 + 2xy + y^2$
On calcule $1.1 - 1^2 = 0$. Le graphe est un cylindre parabolique :



Remarque : comme vous le voyez, il n'est pas toujours facile de reconnaître un paraboloïde hyperbolique ou un paraboloïde elliptique sur l'image donnée par l'ordinateur.

Proposition 1.4. *Il existe des coordonnées orthogonales X, Y, Z dans lesquelles $Z = k_1 X^2 + k_2 Y^2$.*