Intégration des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

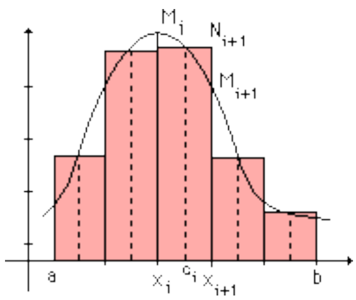
1 Intégration des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

1.1 Intégration des fonctions d'une variable

Soit $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ bornée.

a) Cas où f est en escalier.
Il existe une partition $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ telle que f est constante sur chaque intervalle $]t_i\,,\,t_{i+1}[$ $(f(x) = C_i)$.
Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} C_i\,(t_{i+1} - t_i)$.

b) Si f est bornée on l'approche par des fonctions en escalier.



Définition 1.1. *f est* **intégrable** *sur $[a\,,\,b]$ s'il existe un nombre unique I tel que pour toutes fonctions en escalier $u\,,\,v$ sur $[a\,,\,b]$ vérifiant $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$ on a :*

$$\int_a^b u(x)\,dx \quad\leqslant\quad I \quad\leqslant\quad \int_a^b v(x)dx$$

et si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des fonctions en escalier u_ε et v_ε vérifiant :

$$u_\varepsilon(x) \quad\leqslant\quad f(x) \quad\leqslant\quad v_\varepsilon(x)$$

et

$$0 \quad\leqslant\quad \int_a^b v_\varepsilon(x)\,dx - \int_a^b u_\varepsilon(x)\,dx \quad<\quad \varepsilon$$

Notation : I s'appelle l'intégrale de f sur $[a\,,\,b]$ et se note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Théorème 1.2. *Si f est continue sur $[a,b]$ alors f est intégrable sur $[a,b]$.*

Démonstration : Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Soit ϵ un nombre réel strictement positif. Alors la fonction f est uniformément continue sur $[a,b]$: il existe $\eta > 0$ tel que, si $|x-y| < \eta$ alors $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Prenons n tel que $(b-a)/n < \eta$ et divisons $[a,b]$ en n intervalles de longueur $(b-a)/n < \eta$ dont les extrémités sont les points $x_k = a+k(b-a)/n$, k variant de 0 à n (k prenant $n+1$ valeurs détermine n intervalles $[x_k, x_{k+1}]$ k variant de 0 à $n-1$; on a $x_0 = a$ et $x_n = b$). Définissons deux fonctions en escalier

$$f^-(x) = \min\{f(t), t \in [x_k, x_{k+1}]\} \text{ si } x \in [x_k, x_{k+1}]$$

$$f^+(x) = \max\{f(t), t \in [x_k, x_{k+1}]\} \text{ si } x \in [x_k, x_{k+1}]$$

Par définition on a $f^- \leq f \leq f^+$ et on a

$$\begin{aligned}
\int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx &= \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)\max\{f(t), t \in [x_k, x_{k+1}]\} \\
&\qquad - \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)\min\{f(t), t \in [x_k, x_{k+1}]\} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)\Big(\max_{t\in[x_k,x_{k+1}]} f(t) - \min_{t\in[x_k,x_{k+1}]} f(t)\Big) \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)\epsilon \\
&= \epsilon \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) \\
&= \epsilon(b-a)
\end{aligned}$$

□

1.2 Intégration des fonctions de plusieurs variables

Soit $f : [a_1\,,\, b_1] \times [a_2\,,\, b_2] \times \;\ldots\; \times [a_n\,,\, b_n] \to \mathbb{R}$.
Ici on considère le cas $R = [a\,,\, b] \times [c\,,\, d] \subset \mathbb{R}^2$.

a) f est en escalier.
   Il existe une partition de $[a\,,\, b] \times [c\,,\, d]$:
   $a = s_0 < s_1 < s_2 < \;\ldots\; < s_m = b$
   $c = t_0 < t_1 < \;\ldots\; < t_n = d$
   telle que f est constante à l'intérieur de chaque rectangle $]s_i\,,\, s_{i+1}[\, \times \,]t_j\,,\, t_{j+1}[$ (où elle vaut C_{ij}).
   On définit $\displaystyle\iint_R f(x\,,\, y)\,dx\,dy = \sum_{i\,,\,j} C_{ij}\,(s_{i+1} - s_i)\,(t_{j+1} - t_j)$.

b) f est bornée sur $R = [a\,,\, b] \times [c\,,\, d]$.
On approche f par des fonctions en escalier.

Définition 1.3. *f est* **intégrable** *sur R s'il existe un nombre unique I tel que pour toutes fonctions en escalier $u(x\,,\, y)$ et $v(x\,,\, y)$, telles que $u(x\,,\, y) \leqslant f(x\,,\, y) \leqslant v(x\,,\, y)$, on a :*

$$\iint_R u(x\,,\, y)\, dx\, dy \quad \leqslant \quad I \quad \leqslant \quad \iint_R v(x\,,\, y)\, dx\, dy$$

et si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions en escalier u_ε et v_ε telles que :

$$u_\varepsilon(x\,,\, y) \quad \leqslant \quad f(x\,,\, y) \quad \leqslant \quad v_\varepsilon(x\,,\, y)$$

et

$$0 \quad \leqslant \quad \int_R v_\varepsilon(x\,,\, y)\, dx\, dy - \int_R u_\varepsilon(x\,,\, y)\, dx\, dy \quad < \quad \varepsilon$$

Notation : I s'appelle l'intégrale de f sur R et se note $\displaystyle\iint_R f(x\,,\, y)\, dx\, dy$.

Proposition 1.4. *(Propriétés de l'intégrale double)*

1. *Si f est continue sur R alors f est intégrable.*
2. *Si f est positive sur R alors $\displaystyle\iint_R f(x\,,\, y)\, dx\, dy$ est le volume sous le graphe de f au-dessus de R.*
3. $\displaystyle\iint_R (\alpha f + \beta g)\,(x\,,\, y)\, dx\, dy = \alpha \iint_R f(x\,,\, y)\, dx\, dy + \beta \iint_R g(x\,,\, y)\, dx\, dy.$
4. *Si $R = R_1 \cup R_2$ avec $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ alors :*

$$\iint_R f(x\,,\, y)\, dx\, dy = \iint_{R_1} f(x\,,\, y)\, dx\, dy + \iint_{R_2} f(x\,,\, y)\, dx\, dy$$

Théorème 1.5. *Si f est continue sur R alors $\displaystyle\iint_R f(x\,,\, y)\, dx\, dy$ existe.*

1.3 Calcul des intégrales doubles

Théorème 1.6. *(Fubini) Si f est continue sur $R = [a\,,\, b] \times [c\,,\, d]$ alors :*

$$\iint_R f(x\,,\, y)\, dx\, dy \quad = \quad \int_a^b \left(\int_c^d f(x\,,\, y)\, dy \right) dx \quad = \quad \int_c^d \left(\int_a^b f(x\,,\, y)\, dx \right) dy$$

Exemple

(1) $\displaystyle\iint_R (x^2 + y^2)\, dx\, dy \qquad R = [0\,,\, 1] \times [0\,,\, 1]$

(2) $\displaystyle\iint_R (1 + x + y)\, dx\, dy \qquad R = [0\,,\, 1] \times [0\,,\, 1]$

1.4 Intégration sur les régions bornées de $\mathbb{R}^2$

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est non rectangulaire.
On considère un rectangle R tel que $D \subset R$ et on définit $\overline{f}$ sur R avec :

$$\overline{f}(x\,,\,y) = \begin{cases} f(x\,,\,y) & \text{si } (x\,,\,y) \in D \\ 0 & \text{si } (x\,,\,y) \notin D \end{cases}$$

Avec les notations précédentes on pose, si cela a un sens :

$$\iint_D f(x\,,\,y)\,dx\,dy \quad = \quad \iint_R \overline{f}(x\,,\,y)\,dx\,dy$$

On peut se ramener à deux types de domaine D :

Type 1 : $D = \left\{ (x\,,\,y) \quad / \quad \begin{array}{c} a \leqslant x \leqslant b \\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x) \end{array} \right\}$ où g_1 et g_2 sont continues.

Type 2 : $D = \left\{ (x\,,\,y) \quad / \quad \begin{array}{c} c \leqslant y \leqslant d \\ h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y) \end{array} \right\}$.

Théorème 1.7. *(Fubini)*

a) Si f est continue sur D de type 1, alors f est intégrable et on a :

$$\iint_D f(x\,,\,y)\,dx\,dy \quad = \quad \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x\,,\,y)\,dy \right) dx$$

b) Si f est continue sur D de type 2, alors f est intégrable et on a :

$$\iint_D f(x\,,\,y)\,dx\,dy \quad = \quad \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x\,,\,y)\,dx \right) dy$$

Exemples

(1) $\displaystyle\iint_D (x+2y)\,dx\,dy$: D est la région entre les deux paraboles $y = 2x^2$ et $y = 1 + x^2$.

(2) $\displaystyle\iint_D e^{x^2}\,dx\,dy$ sur le triangle $D = \left\{ (x\,,\,y) \quad / \quad \begin{array}{c} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant x \end{array} \right\}$.

Définition 1.8. *Si D est un domaine borné, on appelle* **aire de** D *: aire$(D) = \displaystyle\iint_D 1\,dx\,dy$.*

1.5 Intégrale double et changement de variables

Rappel à une variable :

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_c^d f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

où g est bijection de $[c\,,\,d]$ sur $[a\,,\,b]$.
Démonstration : Soit F une primitive de f.

On a d'une part

$$F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} F'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt,$$

d'autre part

$$F(g(b)) - F(g(a)) = \int_a^b (F\circ g)'(s)ds = \int_a^b F'(g(s))g'(s)ds = \int_a^b f(g(s))g'(s)ds.$$

□

Théorème 1.9. *Si* $G(u\,,\,v) = (x(u\,,\,v)\,,\,y(u\,,\,v))$ *:*

$$\iint_{G(S)} f(x\,,\,y)\,dx\,dy \;=\; \iint_S f(x(u\,,\,v)\,,\,y(u\,,\,v))\,|\det Jac(G(u\,,\,v))|\,du\,dv$$

avec $Jac(G(u\,,\,v)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$

Une idée de démonstration de ce théorème est donnée en annexe.

Cas des coordonnées polaires
$x = x(r\,,\,\theta) = r\cos\theta$
$y = y(r\,,\,\theta) = r\sin\theta$

$$J(G) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

d'où $\displaystyle\iint_{R=G(S)} f(x\,,\,y)\,dx\,dy \;=\; \iint_S f(r\cos\theta\,,\,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta.$

Exemples

(1) Calcul de l'aire d'un disque.

(2) $\displaystyle\iint_D e^{(-x^2-y^2)}\,dx\,dy$ où D est le disque unité.

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.$

(4) $\displaystyle\iint_R e^{(y-x)/y+x}\,dx\,dy$ où $R = \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{array}\right.$ avec $x+y \leqslant 2$.

1.6 Intégrales triples

$\iiint_R f(x\,,\,y\,,\,z)\,dx\,dy\,dz$

Exemples

Changement de variables Connaître et savoir retrouver le jacobien du passage en coordonnées sphériques : si $\psi(\rho,\theta,\phi) = (\rho\cos(\theta)\sin(\phi), \rho\sin(\theta)\sin(\phi), \rho\cos(\phi))$ et ψ est une bijection de D sur son image, on a

$$\iiint_{\psi(D)} f(x,y,z)\ dxdydz = \iiint_D f(\psi(\rho,\theta,\phi))\rho^2\sin(\phi)\ d\rho d\theta d\phi.$$

2 Intégrales de surface

2.1 Surfaces dans $\mathbb{R}^3$

On peut décrire une surface de $\mathbb{R}^3$ de trois manières :

a) Surface de niveau
$S = \{(x\,,\,y\,,\,z) \in \mathbb{R}^3\ /\ f(x\,,\,y\,,\,z) = 0\}$ où f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
Exemple : $f(x\,,\,y\,,\,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.

b) Graphe d'une fonction $z = f(x\,,\,y)$
Exemple : $z = x^2 + y^2$.

c) Surface paramétrée
Soit $r : T \to \mathbb{R}^2$ où $T \subset \mathbb{R}^2$: $r(u\,,\,v) = \{x(u\,,\,v)\,,\,y(u\,,\,v)\,,\,z(u\,,\,v)\}$.
Exemple : sphère, cône en coordonnées sphériques ou cylindriques.

2.2 Aire de $S = r(T)$

On a Aire $(T) = \iint 1\,du\,dv$.

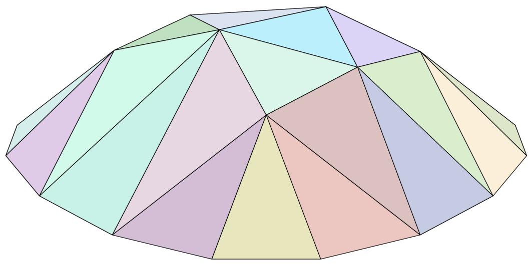
On cherche maintenant à définir l'aire d'une surface paramétrée.

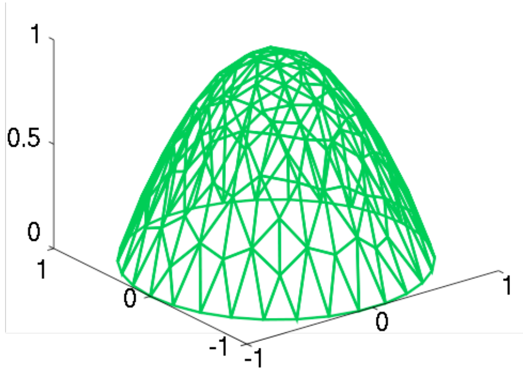
Cas d'une partie plane.

Cas d'une surface paramétrée. Prenons une surface paramétrée par un carré pour simplifier l'écriture.

$$F\ :\ [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3\ :\ (s,v) \mapsto F(u,v).$$

Comme dans le cas d'une courbe on essaye d'approcher la surface par une surface constituée par la réunion de morceaux de plans.





Posons $x_{i,j} = F(i/n, j/n)$. Lorsque i et j varient de 0 à n on obtient ainsi n^2 points répartis sur la surface. Considérons la surface définie comme la réunion de tous les triangles $[x_{i,j}x_{i,(j+1)}, x_{(i+1),j}]$ et $[x_{,ij}x_{i,(j-1)}, x_{(i-1),j}]$. Cette surface colle de plus en plus à la surface paramétrée lorsque n augmente.

Calculons l'aire d'un triangle $[x_{i,j}x_{i,(j+1)}, x_{(i+1),j}]$. C'est la moitié de la norme du produit vectoriel des vecteurs $x_{i,(j+1)} - x_{i,j}$ et $x_{(i+1),j} - x_{i,j}$. Un développement de Taylor donne

$$\begin{aligned} x_{i,(j+1)} - x_{i,j} &= F(i/n, (j+1)/n) - F(i/n, j/n) \\ &= F'(i/n, j/n)(0, 1/n) + \epsilon(1/n)/n \\ &= \frac{\partial F}{\partial v}(i/n, j/n)/n + \epsilon(1/n)/n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{(i+1),j} - x_{i,j} &= F((i+1)/n, j/n) - F(i/n, j/n) \\ &= F'(i/n, j/n)(1/n, 0) + \epsilon(1/n)/n \\ &= \frac{\partial F}{\partial u}(i/n, j/n)/n + \epsilon(1/n)/n. \end{aligned}$$

Le produit vectoriel est donc égal à

$$\frac{1}{n^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u}(i/n, j/n) \wedge \frac{\partial F}{\partial v}(i/n, j/n) + \epsilon(1/n)\right),$$

et la norme de ce vecteur est

$$\frac{1}{n^2}\left(\left\|\frac{\partial F}{\partial u}(i/n, j/n) \wedge \frac{\partial F}{\partial v}(i/n, j/n)\right\| + \eta(1/n)\right).$$

L'aire du triangle $[x_{i,j}x_{i,(j+1)}, x_{(i+1),j}]$ est donc

$$\frac{1}{2n^2}\left(\left\|\frac{\partial F}{\partial u}(i/n, j/n) \wedge \frac{\partial F}{\partial v}(i/n, j/n)\right\| + \eta(1/n)\right).$$

Le même calcul montre que l'aire du triangle $[x_{i,j}x_{i,(j-1)}, x_{(i-1),j}]$ est aussi

$$\frac{1}{2n^2}\left(\left\|\frac{\partial F}{\partial u}(i/n, j/n) \wedge \frac{\partial F}{\partial v}(i/n, j/n)\right\| + \eta(1/n)\right).$$

Lorsque l'on fait la somme des aires de tous ces triangles on obtient donc la somme

$$\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i,j}\left\|\frac{\partial F}{\partial u}(i/n,j/n)\wedge\frac{\partial F}{\partial v}(i/n,j/n)\right\|\right)+\eta(1/n)$$

et la différence de cette somme avec

$$\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i,j}\left\|\frac{\partial F}{\partial u}(i/n,j/n)\wedge\frac{\partial F}{\partial v}(i/n,j/n)\right\|\right)$$

tend vers 0. Or lorsque n tend vers l'infini cette somme converge vers l'intégrale double

$$\iint_{[0,1]^2}\left\|\frac{\partial F}{\partial u}\wedge\frac{\partial F}{\partial v}\right\|\,du\,dv.$$

C'est donc par cette intégrale double qu'on définit l'aire de la surface paramétrée.

Définition 2.1. *On pose : Aire* $(S)=\displaystyle\iint_T\left\|\frac{\partial r}{\partial u}\wedge\frac{\partial r}{\partial v}\right\|\,du\,dv.$

1) Si r est injective alors $S=r(T)$ est une surface paramétrée **simple***.*

2) Si $\left\|\dfrac{\partial r}{\partial u}\wedge\dfrac{\partial r}{\partial v}\right\|\neq 0$ *sur T, alors $S=r(T)$ est dite* **lisse** *(on suppose r de classe C^1).*

Cas particulier : S est définie par $z=f(x\,,\,y)$ alors Aire(S) $=\displaystyle\iint\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$

2.3 Intégrale de surface

Si $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ est bornée sur $S=r(T)$. Alors :

Définition 2.2. *On appelle* **intégrale de surface**

$$\iint_{r(T)} f\,dS\;=\;\iint_T f(r(u\,,\,v))\left\|\frac{\partial r}{\partial u}\wedge\frac{\partial r}{\partial v}\right\|\,du\,dv.$$

Exemple
Calcul d'aire
Recherche de centre de gravité

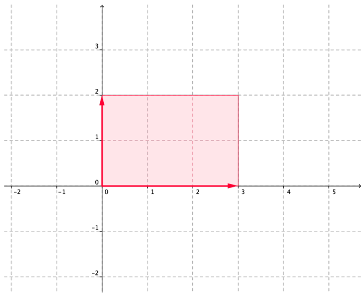
2.4 Changement de paramétrage

Proposition 2.3. *L'intégrale de surface est inchangée quand on change de paramétrage.*

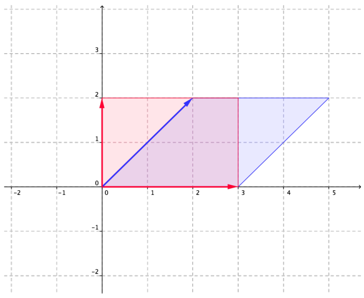
3 Annexe : Une démonstration de la formule de changement de variables

3.1 Le déterminant est (presque) un volume

Cas de la dimension 2. L'aire d'un rectangle est donné par le produit des longueurs de ses côtés.



Si on déforme le rectangle rouge en un parallélogramme bleu en ajoutant au vecteur vertical un multiple du vecteur horizontal l'aire n'est pas modifié.



Les vecteurs définissant les côtés du rectangle dans le premier exemple sont

$$(3, 0) \text{ et } (0, 2).$$

L'aire du rectangle est 3×2 qui est aussi égal au déterminant

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

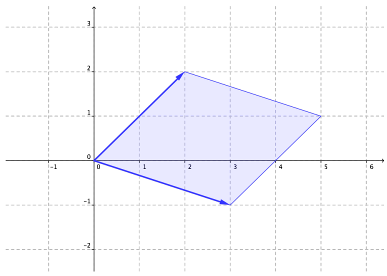
Les vecteurs définissant les côtés du parallélogramme dans le deuxième exemple sont

$$(3, 0) \text{ et } (2, 2).$$

L'aire du rectangle est 3×2 qui est aussi égal au déterminant

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Cela n'est pas très surprenant puisque le déterminant est défini de telle sorte qu'il n'est pas modifié si on ajoute à l'un des vecteurs un produit du deuxième (ici on a ajouté au deuxième vecteur $2/3$ du premier). Si on change un vecteur en son opposé le déterminant est changé en son opposé alors que l'aire n'est pas modifiée, de même si on échange les deux vecteurs. On obtient ainsi une formule pour l'aire d'un parallélogramme dont l'un des sommets est $(0,0)$ et qui est construit à partir de deux vecteurs : c'est la valeur absolue du déterminant de la matrice 2×2 formée des deux vecteurs. Dans l'exemple suivant



l'aire du parallélogramme est

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

Cette propriété est encore vraie en toute dimension à condition de remplacer les parallélogrammes par des figures de dimension plus grande (des parallélépipèdes en dimension 3). Le volume d'un parallélépipède dont l'un des sommets est $(0,0,0)$ et qui est construit à partir de trois vecteurs est la valeur absolue du déterminant de la matrice 3×3 formée des trois vecteurs.

Soit à calculer le volume d'un parallélépipède. La formule géométrique est : aire d'une base multipliée par la hauteur correspondante. Il est possible de modifier le parallélépipède en ajoutant une combinaison des vecteurs de la base pour obtenir un troisième vecteur orthogonal à la base. Cette opération ne modifie pas la base ni la hauteur : le volume est préservé. On sait que cette opération ne modifie pas non plus le déterminant de la matrice des trois vecteurs. Il est ensuite possible de modifier l'un des vecteurs de la base en lui ajoutant un multiple de l'autre de façon à obtenir deux vecteurs orthogonaux (une base rectangulaire). Ce faisant on a conservé l'aire de la base et, évidemment, la hauteur du parallélépipède. On a ainsi obtenu un pavé de même volume que le parallélépipède de départ. Les trois vecteurs orthogonaux le définissant forment une matrice obtenue à partir de la première matrice par ajout à certains vecteurs de combinaisons linéaires des autres. Ces opérations laissent le déterminant inchangé. Le déterminant de cette matrice est donc celui de la première matrice. Le volume d'un pavé est le produit des longueurs de ses côtés. Pour montrer ce que nous voulons il nous reste donc à montrer que le déterminant d'une matrice formée de trois vecteurs orthogonaux deux à deux est égal, au signe près, au produit des normes de ces vecteurs. Soit A une matrice formée de trois vecteurs (V_1, V_2, V_3) orthogonaux. Cette matrice s'écrit comme le produit :

$$A = \begin{pmatrix} \|V_1\| & 0 & 0 \\ 0 & \|V_2\| & 0 \\ 0 & 0 & \|V_3\| \end{pmatrix} .(\frac{V_1}{\|V_1\|}, \frac{V_2}{\|V_2\|}, \frac{V_3}{\|V_3\|}).$$

La deuxième matrice (une matrice 3×3 formée de trois vecteurs colonne) a ses colonnes orthogonales et de normes 1. C'est donc une matrice orthogonale, c'est-à-dire une matrice dont l'inverse est la transposée. Appelons B cette matrice. De l'égalité $B.^tB = Id$ on déduit $det(B)^2 = det(Id) = 1$. Autrement dit on a $det(B) = \pm 1$. Cela signifie que l'on a

$$det(A) = \pm \|V_1\| \|V_2\| \|V_3\|$$

ce qu'on voulait démontrer.

3.2 Volume de l'image d'un compact par une application linéaire

Le cas d'une application linéaire de déterminant nul.

Le cas de l'image d'un cube, d'une réunion de cubes.

Le cas d'un compact intégrable (que l'on peut coincer entre des réunions de cubes de volumes aussi proche que l'on veut).

3.3 Démonstration de la formule

x_i est le centre du cube C_i. Le cube est de côté $1/n$. Il y a un nombre de tels cubes borné par n^d. La formule du changement de variable se déduit de la suite d'approximations suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\phi(D)} f(x)dx &= \sum_i \int_{\phi(D)\cap\phi(C_i)} f(x)dx \\ &= \sum_i \int_{\phi(D\cap C_i)} f(x)dx \\ &\simeq \sum_i \int_{\phi_i(D\cap C_i)} f(x)dx \\ &\simeq \sum_i f(\phi(x_i)).vol(\phi_i(D\cap C_i)) \\ &\simeq \sum_i f(\phi(x_i)).|det(\phi'(x_i)|vol(D\cap C_i)) \\ &\simeq \int_D f(\phi(x)).|det(\phi'(x)|dx. \end{aligned}$$

Justifions rapidement chacune des égalités ou presque égalités apparaissant ci-dessus.
La première est un simple découpage de l'ensemble d'intégration.
La deuxième provient de l'égalité $\phi(D) \cap \phi(C_i) = \phi(D \cap C_i)$ vraie car ϕ est injective.
La fonction ϕ_i est définie par

$$\phi_i(x) = \phi(x_i) + \phi'(x_i)(x - x_i).$$

Comme ϕ est C^2 la différence entre $\phi(x)$ et $\phi_i(x)$ est majorée par une constante fois $1/n^2$.
La différence entre les intégrales

$$\int_{\phi(D\cap C_i)} f(x)dx \text{ et } \int_{\phi_i(D\cap C_i)} f(x)dx$$

est donc de l'ordre $1/n^2 * (1/n)^d = 1/n^{d+1}$. On somme donc n^d fois une quantité d'ordre $1/n^{d+1}$. Lorsque n est grand la différence est bien négligeable.