L'espace $\mathbb{R}^n$

0.1 Produit scalaire, norme et distance dans $\mathbb{R}^n$

Définition 0.1. *Si $x = (x_1 \dots x_n)$ et $y = (y_1 \dots y_n)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on définit leur* **produit scalaire** *par :*

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$$

Définition 0.2. *On appelle* **norme** *de x (ou longueur) $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ et la* **distance** *entre deux vecteurs $d(x\,,\,y) = \|x - y\|$.*

Proposition 0.3. *On a les propriétés suivantes :*

(1) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

(2) $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$

(3) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

(4) $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ *avec* $\langle x, x\rangle = 0$ *si et seulement si* $x = 0$

Théorème 0.4. *Le produit scalaire vérifie l'***inégalité de Cauchy-Schwarz** $\langle x, y\rangle^2 \leqslant \|x\|^2\,\|y\|^2$ *avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.*

Démonstration Je vais donner deux arguments aboutissant à l'inégalité de Cauchy-Schwarz [1].

Soient x et y deux vecteurs et λ un nombre réel. Le nombre $\langle \lambda x + y, \langle \lambda x + y\rangle$ est positif ou nul. On peut développer ce produit scalaire en appliquant les propriétés de linéarité. On obtient :

$$\begin{aligned}
\langle \lambda x + y, \lambda x + y\rangle &= \langle \lambda x, \lambda x + y\rangle + \langle y, \lambda x + y\rangle \\
&= \lambda\langle x, \lambda x + y\rangle + \langle y, \lambda x + y\rangle \\
&= \lambda\langle x, \lambda x\rangle + \lambda\langle x, y\rangle + \langle y, \lambda x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= \lambda^2\langle x, x\rangle + \lambda\langle x, y\rangle + \lambda\langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= \lambda^2\langle x, x\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle
\end{aligned}$$

On obtient donc un polynôme de degré 2 en λ qui est positif ou nul pour tout λ. Cela signifie que le discriminant de ce polynôme est négatif ou nul. Autrement dit on a

$$\langle x, y\rangle^2 - \langle y, y\rangle\langle x, x\rangle \leq 0.$$

Dire que ce discriminant est nul est équivalent à dire qu'il existe λ pour lequel le polynôme est nul ou encore qu'il existe λ pour lequel $\|\lambda x + y\|^2 = 0$ ce qui est équivalent à $\lambda x + y = 0$.

1. ou inégalité de Cauchy-Bunyakovski-Schwarz

Autrement dit l'égalité ne peut être vérifiée que dans les cas où x et y sont colinéaires. On vérifie facilement que l'égalité est satisfaite lorsque x et y sont colinéaires (on a donc l'équivalence). $\square$

La démonstration proposée ci-dessus a l'avantage de s'adapter à d'autres cadres. Par exemple, on peut montrer de cette façon que si f et g sont deux fonctions continues à valeurs réelles sur $[a, b]$ (a et b étant deux nombres réels tels que $a < b$) alors

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq \left(\int_a^b f^2(t)dt\right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(t)dt\right)^{1/2}.$$

Voici une autre manière de voir les choses (certaines affirmations ne seront peut-être justifiées que dans quelques temps en AL2). On utilise l'écriture matricielle du produit scalaire. Prenons deux vecteurs x et y. Leur produit scalaire s'écrit $\langle x, y\rangle = {}^t xy$. Si on multiplie ces deux vecteurs par une matrice orthogonale A on a :

$$\langle Ax, Ay\rangle = {}^t(Ax)Ay = {}^t x {}^t A A y = {}^t xy = \langle x, y\rangle.$$

Autrement dit le produit scalaire n'est pas changé si on multiplie les deux vecteurs par une matrice orthogonale. Il existe une matrice orthogonale A qui envoie x sur $\|x\|e_1$ où e_1 désigne le premier vecteur de la base canonique. On a alors :

$$\langle x, y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = \langle \|x\|e_1, Ay\rangle = \|x\|\langle e_1, Ay\rangle.$$

La première coordonnée de Ay est inférieure à la norme de y. Pourquoi ? La somme des coordonnées de Ay au carré vaut la norme de Ay au carré c'est-à-dire $\|Ay\|^2 = \|y\|^2$. Mais la somme des carrés des coordonnées est supérieure au carré de la première d'entre elles. Finalement l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$ est une conséquence du fait qu'on peut construire une matrice orthogonale dont la première ligne est un vecteur de norme 1 arbitraire (ce qui revient à dire qu'on peut compléter une famille d'un vecteur de norme 1 en une base orthonormée). $\square$

Donnons une autre façon de voir les choses : l'identité de Lagrange

$$(\sum_{i=1}^n x_i y_i)^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 = (\sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2)$$

s'écrit ici

$$\langle x, y\rangle^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 = \|x\|^2\|y\|^2$$

et donne donc une justification à notre énoncé (la somme $\sum_{1\leq i<j\leq n}^n (x_i y_j - x_j y_i)^2$ est

positive ou nulle). Établissons l'identité de Lagrange.

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^n x_i y_i)^2 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i y_i x_j y_j + \sum_{1\leq j<i\leq n} x_i y_i x_j y_j \\
&= \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i y_i x_j y_j \\
&= \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} [x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - (x_i y_j - x_j y_i)^2] \\
&= \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} [x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2] - \sum_{1\leq i<j\leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \\
&= (\sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2) - \sum_{1\leq i<j\leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2
\end{aligned}$$

□

Théorème 0.5. *La norme définie précédemment s'appelle* **norme euclidienne** *et vérifie :*

(i) $\|x\| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$

(ii) $\|x\| > 0$ *si* $x \neq 0$

(iii) $\|\alpha\, x\| = |\alpha|\ \|x\|$

(iv) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Démonstration Si $\|x\| = 0$ alors la somme $\sum_{i=1}^n x_i^2$ vaut 0. Comme tous les carrés sont positifs ou nuls, pour que leur somme soit nulle il faut qu'il soient tous nuls, autrement dit que tous les x_i soient nuls ce qui signifie bien que $x = 0$. Réciproquement, si $x = 0$ alors $\|x\| = 0$. On a

$$\|\alpha\, x\|^2 = \sum_{i=1}^n (\alpha x_i)^2 = \alpha^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \alpha^2\ \|x\|^2.$$

En prenant la racine carrée on obtient

$$\|\alpha\, x\| = \sqrt{\|\alpha\, x\|^2} = \sqrt{\alpha^2\ \|x\|^2} = \sqrt{\alpha^2}\ \sqrt{\|x\|^2} = |\alpha|\ \|x\|.$$

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle \\
&\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

□

L'inégalité de Cauchy Schwarz permet aussi de définir l'angle géométrique entre deux vecteurs : comme $\langle x, y\rangle \leq \|x\|\|y\|$, si aucun des deux vecteurs n'est nul, alors le quotient $\dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}$ est un nombre compris entre -1 et 1.

Définition 0.6. *L'***angle** *entre deux vecteurs non nuls est $\theta \in [0\,,\,\pi]$ vérifiant* $\cos\theta = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}$.

Définition 0.7. *x et y de $\mathbb{R}^n$ sont dits* **orthogonaux** *lorsque $\langle x, y\rangle = 0$.*

Définition 0.8. *(plan dans $\mathbb{R}^3$)*
Soient $A = (x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)$ un point de $\mathbb{R}^3$ et $N = (a\,,\,b\,,\,c)$ un vecteur non nul.
Le plan passant par A et orthogonal à N est $P = \{x \in \mathbb{R}^3 / < (x - A), N >= 0\}$.

0.2 Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$

Définition 0.9. *Si $x = (x_1\,,\,x_2\,,\,x_3)$ et $y = (y_1\,,\,y_2\,,\,y_3)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on définit le* **produit vectoriel** *de x et de y par : $x \wedge y = (x_2\,y_3 - x_3\,y_2\,,\,x_3\,y_1 - x_1\,y_3\,,\,x_1\,y_2 - y_1\,x_2)$.*

Voici une autre définition du produit vectoriel. Supposons x et y fixés et considérons l'application

$$z = (z_1, z_2, z_3) \mapsto det(x, y, z).$$

C'est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Il existe donc des coefficients a_1, a_2, a_3 tels que, pour tous x, y on ait :

$$det(x, y, z) = a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3.$$

Si on note a le vecteur (a_1, a_2, a_3) alors cela s'écrit encore

$$det(x, y, z) = \langle a, z\rangle.$$

On vérifie que le vecteur a ainsi défini a pour coordonnées $(x_2\,y_3 - x_3\,y_2\,,\,x_3\,y_1 - x_1\,y_3\,,\,x_1\,y_2 - y_1\,x_2)$, c'est le produit vectoriel de x et y.

Pour qui sait calculer un déterminant 3x3 en développant par rapport à la troisième colonne cela donne une façon simple de retrouver les coordonnées d'un produit vectoriel :

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = (x_2\,y_3 - x_3\,y_2)z_1 - (x_1\,y_3 - x_3\,y_1)z_2 + (x_1\,y_2 - y_1\,x_2)z_3.$$

Théorème 0.10. *On a les propriétés suivantes :*

(1) $x \wedge y = -\,y \wedge x$

(2) $x \wedge (y+z) = x \wedge y + x \wedge z$

(3) $\alpha\, x \wedge y = x \wedge \alpha\, y = \alpha(x \wedge y)$

(4) $\langle x, x \wedge y\rangle = 0$ *et* $\langle y, x \wedge y\rangle = 0$

(5) $\|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2\,\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2$ *(identité de Lagrange ; déjà vu)*

Démonstration : Je donne une démonstration basée sur les propriétés des déterminants (vous n'avez peut-être pas encore vu ces propriétés en AL2 ; cela viendra). Vous pouvez aussi vérifier ces propriétés en utilisant la définition analytique et en développant les expressions obtenues.

(1) $\langle x \wedge y, z\rangle = det(x, y, z) = -det(y, x, z) = -\langle y \wedge x, z\rangle$

(2) $\langle x \wedge (y+z), u\rangle = det(x, y+z, u) = det(x, y, y) + det(x, z, u) = \langle x \wedge y, u\rangle + \langle x \wedge z, u\rangle = \langle x \wedge y + x \wedge z, u\rangle$

(3) $\langle \alpha x \wedge y, u\rangle = det(\alpha x, y, u) = \alpha det(x, y, u) = \alpha\langle x \wedge y, u\rangle$

(4) $\langle x, x \wedge y\rangle = det(x, y, x) = 0$ et $\langle y, x \wedge y\rangle = det(x, y, y) = 0$

□

Interprétation géométrique de $x \wedge y$

$\|x \wedge y\| = \|x\|\;\|y\|\;\sin\theta$ est l'**aire du parallélogramme** engendré par x et y.

Démonstration : L'aire d'un parallélogramme est donnée par le produit longueur de la base fois hauteur. Un peu de trigonométrie montre que c'est égal à $\|x\|\;\|y\|\;\sin\theta$. Le point (5) ci-dessus donne

$$\|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2\,\|y\|^2 - (x \cdot y)^2 = \|x\|^2\,\|y\|^2 - \|x\|^2\,\|y\|^2\cos^2\theta = \|x\|^2\,\|y\|^2\sin^2\theta.$$

□

0.3 Coordonnées polaires, cylindriques, sphériques

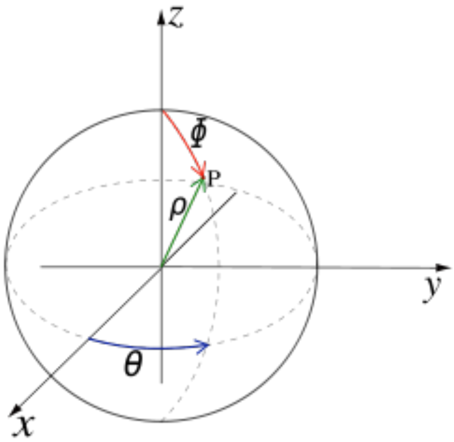
Plutôt que de repérer un point (x, y) du plan $\mathbb{R}^2$ par ses coordonnées cartésiennes dans le repère orthonormé formé par la base canonique, on peut le faire au moyen de sa distance à l'origine et de l'angle formé par le premier vecteur de la base canonique et le vecteur (x, y). La distance à l'origine est définie au moyen du produit scalaire comme ci-dessus. L'angle n'est pas déterminé de manière unique. Plusieurs choix sont possibles. On peut ainsi définir les coordonnées polaires d'un point du plan au moyen de l'application suivante :

$$]0, +\infty[\times[0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2 \quad (\rho, \theta) \mapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta).$$

On aurait pu choisir (le choix est tout aussi bon) de faire varier θ dans $[-\pi, \pi[$. On n'attribue généralement pas de coordonnées polaires au point origine : il est facile de définir sa distance à l'origine, l'angle n'aurait pas de sens.

Dans $\mathbb{R}^3$ on définit les coordonnées sphériques d'un point au moyen de l'application

$$]0,+\infty[\times[0,2\pi[\times]0,\pi[\to\mathbb{R}^3 \quad (\rho,\theta,\phi)\mapsto(\rho\cos\theta\sin\phi,\rho\sin\theta\sin\phi,\rho\cos\phi).$$



Le couple (ρ,θ) forme les coordonnées polaires de la projection du point sur le plan d'équation $z=0$. Là encore on aurait pu choisir d'autres intervalles pour domaines de θ et ϕ. En géographie par exemple la latitude qui correspond à ϕ varie de -90 à 90 degrés et c'est l'angle avec le plan de l'équateur qui la définit (pas l'angle avec l'axe pôle sud pôle nord). Pour une illustration très parlante des coordonnées sphériques on pourra regarder le premier chapitre du film dimensions [2].

2. http://www.dimensions-math.org/Dim_fr.htm