

Optimisation libre et sous contrainte

1 Optimisation libre

Extrait des *recherches sur la méthode de maximis et minimis* de Lagrange (1759) :

DE MAXIMIS ET MINIMIS.

5

A est négatif il sera un *maximum*; si $A = 0$ on suivra les règles données (1).

4. Les variables contenues dans Z soient deux, savoir t et u ; alors

$$d^2Z = A dt^2 + 2B dt du + C du^2.$$

Il paraît au premier aspect bien difficile de connaître si cette expression d^2Z doit être positive ou négative, sans qu'on ait le rapport de dt à du , qui n'est pas donné; car, puisqu'en changeant ce rapport la fonction d^2Z doit aussi varier, il semble indubitable qu'elle pourra aussi passer du positif au négatif, et du négatif au positif, pendant que les quantités A, B, C restent les mêmes. Qu'on donne cependant à la proposée

$$A dt^2 + 2B dt du + C du^2$$

cette forme

$$A \left(dt + \frac{B du}{A} \right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{A} \right) du^2;$$

et on verra que, comme les carrés $\left(dt + \frac{B du}{A} \right)^2$ et du^2 ont toujours le même signe $+$, toute la quantité sera nécessairement positive si les deux coefficients A et $C - \frac{B^2}{A}$ sont positifs, et au contraire elle deviendra négative, lorsque ceux-ci seront tous deux négatifs, quel que soit le rapport de dt à du . On aura donc pour le cas du *minimum*

$$A > 0; \quad C - \frac{B^2}{A} > 0,$$

savoir

$$C > \frac{B^2}{A} \quad \text{ou} \quad CA > B^2,$$

ce qui donne de même

$$C > 0;$$

à moins donc que les quantités A, B, C n'aient ces conditions

$$A > 0, \quad C > 0 \quad \text{et} \quad AC > B^2,$$

1.1 Formule de Taylor à l'ordre 2

1.2 En dimension 1

Donnons-nous une fonction d'une variable F définie sur $[0, 1]$ et trois fois continument dérivable. Soient u et v deux fonctions C^1 sur un intervalle I . La formule de dérivation d'un produit donne :

$$(u.v)' = u'.v + u.v' \text{ soit } u.v' = (u.v)' - u'.v.$$

Les fonctions apparaissant dans ces égalités étant continues elles sont intégrables sur les intervalles bornés de I . Si a et x sont des éléments de I on a donc

$$\int_a^x u(t)v'(t)dt = \int_a^x u(t)v(t)dt - \int_a^x u'(t)v(t)dt = u(x)v(x) - u(a)v(a) - \int_a^x u'(t)v(t)dt.$$

On note souvent

$$u(x)v(x) - u(a)v(a) = [u(t)v(t)]_a^x$$

En intégrant deux fois par parties la première des expressions suivantes on obtient :

$$\begin{aligned} F(1) - F(0) &= \int_0^1 F'(s)ds \\ &= [-(1-s)F'(s)]_0^1 + \int_0^1 F''(s)(1-s)ds \\ &= F'(0) + [-F''(s)(1-s)^2/2]_0^1 + \int_0^1 F'''(s)(1-s)^3/6ds \\ &= F'(0) + F''(0)/2 + \int_0^1 F'''(s)(1-s)^3/6ds \end{aligned}$$

De cette égalité on déduit la majoration suivante :

$$|F(1) - F(0) - F'(0) - F''(0)/2| \leq \max_{s \in [0,1]} |F'''(s)|/6.$$

Appliquons ce résultat à la fonction $F : s \mapsto f(x+sh)$ lorsque f est une fonction trois fois continument dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $F'(s) = hf'(x+sh)$, $F''(s) = h^2f''(x+sh)$, $F'''(s) = h^3f'''(x+sh)$, $F(0) = f(x)$, $F(1) = f(x+h)$. La majoration précédente s'écrit donc ici :

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x) - f''(x)h^2/2| \leq h^3 \max_{s \in [x, x+h]} |f'''(s)|/6.$$

Notons M un majorant de la dérivée troisième de f sur l'intervalle d'étude de f et supposons qu'en x la dérivée de f soit nulle. Supposons que $f''(x)$ ne soit pas nul, par exemple qu'il soit positif. Prenons $h > 0$, on a alors :

$$f(x) + f''(x)h^2/2 - |h|^3M/6 \leq f(x+h) \leq f(x) + f''(x)h^2/2 + |h|^3M/6,$$

soit

$$f(x) + h^2(f''(x)/2 - |h|M/6) \leq f(x+h) \leq f(x) + h^2(f''(x)/2 + |h|M/6).$$

Alors, pour $|h|$ suffisamment petit, $f''(x)/2 - |h|M/6$ est positif. Par exemple si $0 < |h| < f''(x)/M$, $f''(x)/2 - |h|M/6 > f''(x)/2 - f''(x)/M.M/6 = f''(x)/3 > 0$. On a alors, pour tout $h \in [-f''(x)/M, f''(x)/M]$, $f(x) + h^2 f''(x)/3 \leq f(x+h)$. Autrement dit sur l'intervalle $[x - f''(x)/M, x + f''(x)/M]$, f atteint sa plus petite valeur en x . C'est exactement dire que f a un minimum local en x .

La recherche des **extrema locaux** pour une fonction d'une variable :

- (i) On recherche les points critiques ($f'(x) = 0$).
- (ii) On étudie la dérivée seconde f'' si a est un point critique et si
 - $f''(a) > 0$ il y a un minimum local,
 - $f''(a) < 0$ il y a un maximum local,
 - $f''(a) = 0$ il faut approfondir l'étude.

1.3 Extrema locaux de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$, c'est-à-dire que ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 existent et sont continues.

Définition 1.1. f a un **minimum** (resp. **maximum**) local en (x_0, y_0) s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que : $\forall (x, y) \in B((x_0, y_0), \varepsilon)$ alors $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ (resp. $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$).

Exemple

$$f(x, y) = -x^2 - y^2$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

Proposition 1.2. Si f admet un **extremum local** en (x_0, y_0) alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Définition 1.3. Si en (x_0, y_0) on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ on dit que (x_0, y_0) est un **point critique** de f ou un **point stationnaire** de f .

Remarque

Un extremum local est un point critique mais la réciproque n'est pas vraie.

1.4 Formule de Taylor

Définition 1.4. Soit $f(x, y)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. La **matrice hessienne** de f en

(x_0, y_0) est la matrice $\text{Hess}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$

où $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$.

Exemple

Calculer la matrice Hessienne de $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$.

Théorème 1.5. (Formule de Taylor à l'ordre 2, en $X = (x_0, y_0)$)

$$f(X + H) = f(X) + \nabla f(X) \cdot H + \frac{1}{2} H^t \text{Hess}(x_0, y_0) H + \|H\|^2 \varepsilon(H)$$

Théorème 1.6. Soient $f(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^2$ et (x_0, y_0) un point critique. Soit $\Delta = AC - B^2 = \det(\text{Hess}(x_0, y_0))$. Alors :

si $\Delta > 0$ et $A > 0$, f a un minimum local en (x_0, y_0)

si $\Delta > 0$ et $A < 0$, f a un maximum local en (x_0, y_0)

si $\Delta < 0$, f n'a ni maximum ni minimum, elle a un point selle

si $\Delta = 0$ on ne peut conclure (avec le seul développement à l'ordre 2).