Dérivées des fonctions de plusieurs variables (suite)

1 La différentielle d'une fonction à valeurs réelles

Cas des fonctions d'une variable

(i) f est dérivable en X_0 si $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(X_0+h) - f(X_0)}{h}$ existe.
Sa valeur ℓ est notée $f'(X_0)$.

(ii) On peut, de manière équivalente, écrire $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(X_0+h) - f(X_0) - \ell h}{h} = 0$.
On remarque que $h \to L(h) = \ell h$ est une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, que l'on appelle **différentielle** de f en X_0 et que l'on note $df(X_0)$.

(iii) Si f est dérivable en X_0 , alors pour h petit : $f(X_0+h)$ est "voisin" de $f(X_0)+f'(X_0)h$. Donc $h \to f(X_0) + f'(X_0)h$ est une application affine qui "approche très bien " $f(X_0+h)$.

Définition 1.1. *f est différentiable en x s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que :*

$$f(x+h) = f(x) + L(h) + \|h\|\epsilon(h),$$

avec $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$. L'application L est **la différentielle de f en x** *et se note $df(x)$ ou $f'(x)$.*

Remarque

Cette définition signifie que l'application affine $f(x)+df(x)\cdot h$ est tangente à l'application $h \mapsto f(x+h)$ en 0. Lorsque qu'on remplace $f(x+h)$ par $f(x)+df(x)\cdot h$ et que h est petit, alors on fait une erreur négligeable par rapport à h.
Cela revient à dire

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{\|h\|} = 0$$

La différentielle, lorsqu'elle existe, est unique.

Proposition 1.2. *Si f est différentiable en x, alors ses dérivées partielles existent et on a :*

$$\begin{aligned} df(x)\cdot h &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\, h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\, h_n \\ &= \nabla f \cdot h \end{aligned}$$

Remarque

La matrice de l'application linéaire $df(x)$ dans la base canonique est le gradient $\nabla f(x)$.

Proposition 1.3. *Si f est différentiable en x alors f est continue en x.*

Remarque
L'existence des dérivées partielles de f n'implique pas la différentiabilité.
Mais :

Théorème 1.4. *Si f admet des dérivées partielles et si elles sont continues alors f est différentiable.*
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

1.1 Règle de différentiation

Proposition 1.5. *Si f et g sont différentiables on a :*

(i) $d(f+g)(x) = df(x) + dg(x)$

(ii) $d(\lambda f)(x) = \lambda\, df(x)$

(iii) $d(fg)(x) = f(x)\, dg(x) + g(x)\, df(x)$

(iv) $d\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{g(x)\, df(x) - f(x)\, dg(x)}{g^2(x)}$ *(à condition que $g(x) \neq 0$)*

1.2 Remarques

Si $f : U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors :

(i) Si f est $\mathcal{C}^1$ sur U alors f est différentiable sur U et les dérivées $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ existent sur U.
Les réciproques ne sont pas vraies !!

(ii) Si f est différentiable en $x_0 \in U$ alors l'application affine $A(h) = f(x_0) + df(x_0) \cdot h$ a pour graphe l'espace tangent au graphe de f en x_0.

1.3 Dérivées partielles successives

Les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$ sont des fonctions de $x_1, \dots, x_n$, et il arrive souvent qu'elles sont eux-même dérivables.

Définition 1.6. *On écrit, lorsqu'elle existe,* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ *et on dit qu'il s'agit d'une* **dérivée partielle seconde** *de f.*

Exemple
$f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^3 y^4$. Alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 12x^2y^3 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$.

Théorème 1.7. *(Schwarz)*
Si les déirvées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}$ *existent et sont continues dans une boule autour de* $(a_1 \dots a_n)$ *alors :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}(a)$$

2 La différentielle d'une fonction à valeurs vectorielles

Définition 2.1. *F de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est* **différentiable** *en $x \in \mathbb{R}^n$ s'il existe une* **application linéaire** *L de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ telle que :*

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{F(x+h) - F(x) - L \cdot h}{\|h\|} = 0\,.$$

L est la **différentielle** *de F en x et se note : $dF(x)$.*

Théorème 2.2. *F est différentiable en x si et seulement si ses composants sont différentiables et on a :*

$$dF(x) \cdot h \;=\; (\nabla f_1(x) \cdot h\,, \,\dots\,,\, \nabla f_m(x) \cdot h)\,.$$

Définition 2.3. *La matrice*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

est la matrice de $dF(x)$ et est appelée **matrice jacobienne** *de F en x et se note : $J(F)(x)$.*

Théorème 2.4. *Si F a des composantes de classe $\mathcal{C}^1$ alors elles sont différentiables et F est également différentiable.*

Exercice

(i) Trouver la matrice jacobienne de F en $(1\,,\,1)$ de : $F(x\,,\,y) = (x^2 + y^2\,,\,e^{xy})$.

(ii) Trouver la différentielle de $F(x\,,\,y\,,\,z) = (x\,,\,y\,,\,z)$.

(iii) Trouver la différentielle de $F(r\,,\,\theta) = (r\,\cos\theta\,,\,r\,\sin\theta)$.

2.1 Propriétés de la différentielle

Proposition 2.5. *Si F de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est linéaire, alors $dF(x) = F$.*

Proposition 2.6. *Si F est différentiable en x alors F est continue en x.*

2.2 Différentielles des fonctions composées

Si F est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, si G est une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^q$, alors $G \circ F$ est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^q$.

Théorème 2.7. *Si F est différentiable en x, et si G est différentiable en $F(x)$, alors $G \circ F$ est différentiable en x et on a :*

$$d(G \circ F)(x) \quad = \quad dG(F(x)) \circ dF(x)\,.$$

Exercice
Dériver $G \circ F$ lorsque
$F(x\,,\,y) = (x^2 + y^2\,,\,e^{xy})$
$G(u\,,\,v) = (xy\,,\,\sin x\,,\,x^2\,y)$

2.3 Sur la règle de dérivation en chaîne

Le résultat théorique
Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions différentiables. Écrivons $h = f \circ g$. D'après la règle de dérivation des fonctions composées nous avons (comme pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) :

$$h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x).$$

La fonction $f \circ g$ est une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Sa dérivée est donc un vecteur ligne à p colonnes, la transposée de son gradient :

$$h'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h}{\partial x_p} \end{pmatrix}.$$

La fonction g est une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$. Sa dérivée est la matrice $n \times p$ composée des vecteurs transposés des gradients des coordonnées de g. Si $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \ldots, g_2(x))$ (on devrait écrire ce vecteur en colonne si on voulait se conformer en toute rigueur aux choix du cours) la dérivée de g s'écrit :

$$g'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_p} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_p} \end{pmatrix}.$$

Pour simplifier la présentation appelons $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ un point de $\mathbb{R}^n$. C'est un abus de notation, g ne désigne pas ici la fonction g mais un vecteur, un point dans $\mathbb{R}^n$. La dérivée de f en un point g est donnée par la transposée de son gradient :

$$f'(g) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial g_1} & \frac{\partial f}{\partial g_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial g_n} \end{pmatrix}.$$

L'égalité matricielle $h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x)$ signifie donc :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h}{\partial x_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial g_1} & \frac{\partial f}{\partial g_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial g_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_p} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_p} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit pour tout $i = 1, \ldots, p$ on a

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial g_k} \frac{\partial g_k}{\partial x_i}.$$

Attention ! Quand g_k apparaît au dénominateur cela signifie seulement que l'on prend la dérivée de f par rapport à sa $k$ième variable. Quand il apparaît au numérateur g_k désigne la $k$ième coordonnée de g : c'est alors une fonction.

Un exemple

Prenons $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ deux fonctions différentiables définies par

$$f(x, y, z) = 2xy - 3(x + z),$$
$$g(x, y) = (x + y^4, y - 3x^2, 2x^2 - 3y).$$

On demande de calculer les dérivées partielles de la fonction de deux variables $h = f \circ g$. Pour se ramener au théorème général et ne pas s'embrouiller, il est préférable de changer les noms des variables dans l'expression de f :

$$f(g_1, g_2, g_3) = 2g_1g_2 - 3(g_1 + g_3).$$

La formule de dérivation en chaîne donne alors

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial g_1}\frac{\partial(x + y^4)}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial g_2}\frac{\partial(y - 3x^2)}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial g_3}\frac{\partial(2x^2 - 3y)}{\partial x},$$
$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial g_1}\frac{\partial(x + y^4)}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial g_2}\frac{\partial(y - 3x^2)}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial g_3}\frac{\partial(2x^2 - 3y)}{\partial y}.$$

Pour $\frac{\partial h}{\partial x}$, on obtient :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = (2g_2 - 3).1 + 2g_1.(-6x) + (-3).4x$$

Exprimée en fonction de x et y cette dérivée s'écrit :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 2y - 6x^2 - 3 - 12x(x + y^4) - 12x = -12xy^4 - 18x^2 + 2y - 12x - 3.$$

Je vous laisse le calcul de la deuxième dérivée partielle de h en exercice.
Remarque. On peut aussi écrire les choses sous la forme :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial(x + y^4)}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial(y - 3x^2)}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial(2x^2 - 3y)}{\partial x},$$

mais c'est un peu risqué. Il ne faut surtout pas oublier de prendre les valeurs des dérivées partielles de f au point $(x + y^4, y - 3x^2, 2x^2 - 3y)$.