L'espace $\mathbb{R}^n$ (suite)

Exemples
$A_1 = \{(x\,,\,y)\,/\,x^2+y^2<1\}$ est ouvert.
$A_2 = \{(x\,,\,y)\,/\,x^2+y^2\leqslant 1\}$ est fermé.
$A_3 = A_1 \cup \{(1\,,\,0)\}$ n'est ni ouvert ni fermé.
$]0\,,\,1[\,\subset \mathbb{R}$ est ouvert dans $\mathbb{R}$.
$]0\,,\,1[\times\{0\} \subset \mathbb{R}^2$ n'est ni ouvert ni fermé.
$[0\,,\,1] \subset \mathbb{R}$ est fermé dans $\mathbb{R}$.
$[0\,,\,1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$.

Ci-dessous, vous trouverez un exercice corrigé (en bleu). Le contrôle continu et l'examen contiendront à coup sûr un exercice de ce type.
Exercice Montrer *en utilisant la définition* que les parties de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$suivantes sont ouvertes :
Dans les deux cas il s'agit de montrer que pour tout point de l'ensemble considéré, il existe une boule centrée en ce point et incluse dans l'ensemble.
(a) $]-\infty, 3[$,
Soit $x \in]-\infty, 3[$. Posons $r = 3-x$. Alors $r>0$ et si $y \in B(x,r)$ c'est-à-dire $x-r<y<x+r$, alors $y < x+3-x = 3$, autrement dit $y \in]-\infty, 3[$.
(b) $\{(x,y)\ /\ (x-1)^2+(y+1)^2<1\}$.
Soit $(x_0,y_0) \in \{(x,y)\ /\ (x-1)^2+(y+1)^2<1\}$. Posons $r = 1-d((x_0,y_0),(1,-1))$. Alors $r>0$ et si $(x,y)\in B((x_0,y_0),r)$, c'est-à-dire si $d((x,y),(x_0,y_0))<r$, alors grâce à l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} d((x,y),(1,-1)) &\leq d((x,y),(x_0,y_0)) + d((x_0,y_0),(1,-1)) \\ &< r + d((x_0,y_0),(1,-1)) = 1 - d((x_0,y_0),(1,-1)) + d((x_0,y_0),(1,-1)) = 1, \end{aligned}$$

autrement dit (x,y) appartient à $\{(u,v)\ /\ (u-1)^2+(v+1)^2<1\}$.
La correction qui est donnée est minimale. Il faut savoir écrire de telles justifications mais pour les trouver il faut avoir en tête des images géométriques. Cela n'est pas très difficile pour l'intervalle. Pour le (b) il est plus facile de comprendre ce qui est écrit si on sait que l'ensemble donné est le disque ouvert de centre $(1,-1)$ et de rayon 1. En pratique on ne reviendra pas à la définition pour montrer qu'un tel ensemble est ouvert (on utilisera un théorème vu plus bas). Cet exercice est un exercice de logique et d'écriture, de compréhension formelle d'une définition.

Proposition 0.1. *1. $\mathbb{R}^n$ et $\varnothing$ sont ouverts (et donc aussi fermés).*

2. Toute réunion d'ouverts est un ouvert.

3. Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

0.1 Suites dans $\mathbb{R}^n$

Définition 0.2. *Une suite dans $\mathbb{R}^n$ est une famille de vecteurs $x_k = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ indexée par l'ensemble des entiers naturels $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Chaque terme de la suite x_k est un vecteur avec ses n coordonnées.*

Définition 0.3. *Une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$* **converge** *dans $\mathbb{R}^n$ vers $b \in \mathbb{R}^n$ si $\forall \varepsilon > 0\,, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant N$ entraîne $\|x_k - b\| < \varepsilon$.*

De manière équivalente on peut définir la convergence d'une suite de vecteurs (x_k) par la convergence de chacune des suites réelles données par les coordonnées $x_i^{(k)}$, i allant de 1 à n, k variant dans $\mathbb{N}$ (les suites des coordonnées sont indexées par k et il y en a n : $(x_i^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$).

Une autre façon de dire que la suite (x_k) tend vers b est de dire que la suite réelle de nombre positifs ou nuls $(d(x_k, b))_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Remarques

1. On dit que b est **la limite** de la suite (x_k) et on note $x_k \to b$.
2. $x_k \to b$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$ la boule $B(b\,,\,\varepsilon)$ contient toute la suite sauf un nombre fini de x_k.

Proposition 0.4. *A est fermé si et seulement si pour toute suite convergente contenue dans A et convergente, la limite est dans A.*

Démonstration : Nous souhaitons montrer une équivalence. Nous allons montrer que les deux implications sont vraies.
• Supposons d'abord que A soit fermé. On veut montrer que toute suite convergente d'éléments de A a sa limite dans A. Soit (x_k) une suite convergente d'éléments de A. Appelons l sa limite. Il s'agit de montrer que l appartient à A.
Supposons que l n'appartiennent pas à A. Cela revient à dire que l appartient à ${}^cA$. Or A est fermé, donc ${}^cA$ est ouvert. Il existe donc $r > 0$ tel que $B(l, r) \subset {}^cA$. Mais par hypothèse, (x_k) tend vers x. Cela signifie en particulier, qu'il existe k_0 tel que, pour $k \geq k_0$, x_k appartient à $B(l, r)$. On a donc à la fois $B(l, r) \subset {}^cA$ et $x_{k_0} \in A \cap B(l, r)$. Cela constitue une contradiction. L'hypothèse faite (l n'appartient pas à A) est absurde : l appartient à A.
• Pour montrer l'implication réciproque on utilise la contraposée. On montre que si A n'est pas fermé alors il est possible de trouver une suite convergente d'éléments de A dont la limite ne soit pas dans A.
Supposons que A ne soit pas fermé. Cela signifie que ${}^cA$ n'est pas ouvert. Autrement dit il existe x dans ${}^cA$ tel que pour tout $r > 0$, $B(x, r)$ n'est pas inclus dans ${}^cA$. Ne pas être inclus dans ${}^cA$, signifie contenir un point de ${}^c({}^cA) = A$.
Pour tout entier $k \geq 1$, on peut donc trouver un point x_k appartenant à $B(x, 1/k)$ et à

A. En prenant pour chaque k un tel point x_k, on obtient une suite (x_k) d'éléments de A convergeant vers x n'appartenant pas à A. □

Cette proposition fournit un critère pour démontrer qu'un ensemble A n'est pas fermé : il suffit de trouver une suite de points de A convergeant vers un point n'appartenant pas à A.

Théorème 0.5. *Soit (x_k) une suite bornée. Il existe une sous-suite de (x_k) convergeant dans $\mathbb{R}^n$.*

0.2 Ensembles compacts

Définition 0.6. *$X \subset \mathbb{R}^n$ est compact si X est fermé et borné (borné veut dire qu'il existe $R > 0$ tel que $X \subset B(0\,,\,R)$).*

Exemples
$[0, 23]$ est un compact dans $\mathbb{R}$.
$\{(x, y)\ /x^2 + (y - 2)^2 \leq 6\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.
$[2, 3] \times [1, 3] \times [5, 7]$ est un compact dans $\mathbb{R}^3$.

Théorème 0.7. *(Bolzano-Weierstrass)*
Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ compact. Alors toute suite $(x_k) \subset X$ contient une sous-suite (x_{l_k}) qui converge vers un point de X.