L'espace $\mathbb{R}^n$ (suite)

0.1 Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$

Définition 0.1. *Si $x = (x_1\,,\, x_2\,,\, x_3)$ et $y = (y_1\,,\, y_2\,,\, y_3)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on définit le* **produit vectoriel** *de x et de y par : $x \wedge y = (x_2\, y_3 - x_3\, y_2\,,\, x_3\, y_1 - x_1\, y_3\,,\, x_1\, y_2 - y_1\, x_2)$.*

Voici une autre définition du produit vectoriel. Supposons x et y fixés et considérons l'application

$$z = (z_1, z_2, z_3) \mapsto det(x, y, z).$$

C'est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Il existe donc des coefficients a_1, a_2, a_3 tels que, pour tous x, y on ait :

$$det(x, y, z) = a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3.$$

Si on note a le vecteur (a_1, a_2, a_3) alors cela s'écrit encore

$$det(x, y, z) = \langle a, z\rangle.$$

On vérifie que le vecteur a ainsi défini a pour coordonnées $(x_2\, y_3 - x_3\, y_2\,,\, x_3\, y_1 - x_1\, y_3\,,\, x_1\, y_2 - y_1\, x_2)$, c'est le produit vectoriel de x et y.

Pour qui sait calculer un déterminant 3x3 en développant par rapport à la troisième colonne cela donne une façon simple de retrouver les coordonnées d'un produit vectoriel :

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = (x_2\, y_3 - x_3\, y_2) z_1 - (x_1\, y_3 - x_3\, y_1) z_2 + (x_1\, y_2 - y_1\, x_2) z_3.$$

Théorème 0.2. *On a les propriétés suivantes :*

(1) $x \wedge y = -\, y \wedge x$

(2) $x \wedge (y + z) = x \wedge y + x \wedge z$

(3) $\alpha\, x \wedge y = x \wedge \alpha\, y = \alpha(x \wedge y)$

(4) $\langle x, x \wedge y\rangle = 0$ *et* $\langle y, x \wedge y\rangle = 0$

(5) $\|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2\, \|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2$ *(identité de Lagrange ; déjà vu)*

Démonstration : Je donne une démonstration basée sur les propriétés des déterminants (vous n'avez peut-être pas encore vu ces propriétés en AL2 ; cela viendra). Vous pouvez aussi vérifier ces propriétés en utilisant la définition analytique et en développant les expressions obtenues.

(1) $\langle x \wedge y, z\rangle = det(x, y, z) = -det(y, x, z) = -\langle y \wedge x, z\rangle$

(2) $\langle x \wedge (y+z), u\rangle = det(x, y+z, u) = det(x, y, y)+det(x, z, u) = \langle x\wedge y, u\rangle + \langle x \wedge z, u\rangle = \langle x \wedge y + x \wedge z, u\rangle$

(3) $\langle \alpha x \wedge y, u\rangle = det(\alpha x, y, u) = \alpha det(x, y, u) = \alpha\langle x \wedge y, u\rangle$

(4) $\langle x, x \wedge y\rangle = det(x, y, x) = 0$ et $\langle y, x \wedge y\rangle = det(x, y, y) = 0$

□

Interprétation géométrique de $x \wedge y$

$\|x \wedge y\| = \|x\|\ \|y\|\ \sin\theta$ est l'**aire du parallélogramme** engendré par x et y.

Démonstration : L'aire d'un parallélogramme est donnée par le produit longueur de la base fois hauteur. Un peu de trigonométrie montre que c'est égal à $\|x\|\ \|y\|\ \sin\theta$. Le point (5) ci-dessus donne

$$\|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2\,\|y\|^2 - (x\cdot y)^2 = \|x\|^2\,\|y\|^2 - \|x\|^2\,\|y\|^2\cos^2\theta = \|x\|^2\,\|y\|^2\sin^2\theta.$$

□

0.2 Coordonnées polaires, cylindriques, sphériques

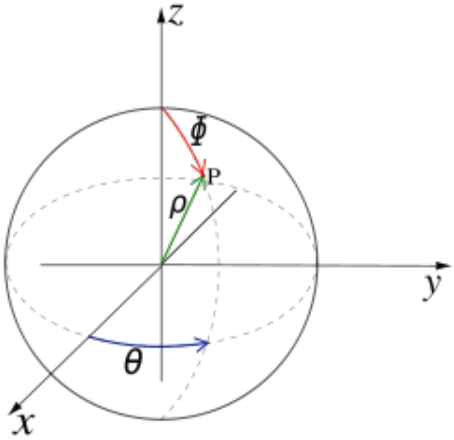
Plutôt que de repérer un point (x, y) du plan $\mathbb{R}^2$ par ses coordonnées cartésiennes dans le repère orthonormé formé par la base canonique, on peut le faire au moyen de sa distance à l'origine et de l'angle formé par le premier vecteur de la base canonique et le vecteur (x, y). La distance à l'origine est définie au moyen du produit scalaire comme ci-dessus. L'angle n'est pas déterminé de manière unique. Plusieurs choix sont possibles. On peut ainsi définir les coordonnées polaires d'un point du plan au moyen de l'application suivante :

$$]0, +\infty[\times[0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2 \quad (\rho, \theta) \mapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta).$$

On aurait pu choisir (le choix est tout aussi bon) de faire varier θ dans $[-\pi, \pi[$. On n'attribue généralement pas de coordonnées polaires au point origine : il est facile de définir sa distance à l'origine, l'angle n'aurait pas de sens.

Dans $\mathbb{R}^3$ on définit les coordonnées sphériques d'un point au moyen de l'application

$$]0, +\infty[\times[0, 2\pi[\times]0, \pi[\to \mathbb{R}^3 \quad (\rho, \theta, \phi) \mapsto (\rho\cos\theta\sin\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\phi).$$



Le couple (ρ, θ) forme les coordonnées polaires de la projection du point sur le plan d'équation $z = 0$. Là encore on aurait pu choisir d'autres intervalles pour domaines de θ et ϕ. En géographie par exemple la latitude qui correspond à ϕ varie de -90 à 90 degrés et c'est l'angle avec le plan de l'équateur qui la définit (pas l'angle avec l'axe pôle sud pôle nord). Pour une illustration très parlante des coordonnées sphériques on pourra regarder le premier chapitre du film dimensions [1]

0.3 Topologie de $\mathbb{R}^n$

Définition 0.3. *Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$.*
On appelle $B(a\,,\,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x - a\| < r\}$ la **boule ouverte** *de centre a et de rayon r.*

Exemple
Dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ on retrouve les intervalles, les disques, les boules ouvertes.

Proposition 0.4. *Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$.*
Alors une des trois conditions suivantes est vérifiée :

(i) $\exists r > 0$ *tel que* $B(a\,,\,r) \subset A$

(ii) $\exists r > 0$ *tel que* $B(a\,,\,r) \subset A^c$ *où* $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$

(iii) $\forall r > 0\,,\, B(a\,,\,r)$ *contient des points de A et de A^c.*

Définition 0.5. *L'***intérieur** *de A (noté int(A) ou $\overset{\circ}{A}$) est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ vérifiant (i).*
*L'***extérieur** *de A (noté ext A) est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la condition (ii).*
La **frontière** *de A (notée ∂A) est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la condition (iii).*
La **fermeture** *de A (notée $\overline{A}$) est la réunion de A et de ∂A.*

1. http://www.dimensions-math.org/Dim_fr.htm

Exemples dans $\mathbb{R}^2$
$A = \{x \in \mathbb{R}^2 \,/\, \|x\| < 1\}$
$A = \{(n\,,\,0) \,/\, n \in \mathbb{Z}\}$

Définition 0.6. *Un ensemble* A *de* $\mathbb{R}^n$ *est :*

(i) **ouvert** *si* $\forall a \in A\,,\, \exists r > 0$ *tel que* $B(a\,,\,r) \subset A$

(ii) **fermé** *si* A^c *est ouvert.*

Proposition 0.7. A *est ouvert si et seulement si* $\mathring{A} = A$.
A *est fermé si et seulement si* $\overline{A} = A$.