

Intégration (suite)

Ce qui suit comporte trois parties : la première correspond à peu près à ce qui a été traité lors du dernier cours, certains exemples du cours et d'autres calculs sont présentés dans la deuxième, la troisième aborde la question des champs de vecteurs dans l'espace et les théorèmes de Stokes et de Gauss-Ostrogradsky, dont il n'a pas été question en cours faute de temps (aucune question ne portera sur ce paragraphe 3 à l'examen).

1 Champs de vecteurs et intégrales curvilignes

1.1 Définition

Définition 1.1. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.

Un **champ de vecteurs** sur U est une application F de U dans \mathbb{R}^n de classe C^1 . L'application F associe un vecteur à chaque point.

Exemples

$$(1) F(x, y) = (-y, x)$$

$$(2) F(x, y) = (1, 0)$$

$$(3) F(x, y, z) = (x, y, z)$$

$$(4) F(X) = \frac{X}{\|X\|} \quad \text{si } X \neq 0$$

$$(5) \text{ Si } f \text{ est une fonction de } \mathbb{R}^n \text{ dans } \mathbb{R}, \text{ soit } F(x) = \nabla f(x).$$

Ce champ de vecteurs est appelé champ gradient.

1.2 Intégrale curviligne

Définition 1.2. Soient $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe C^1 et F un champ de vecteurs défini sur l'image de r (qui est une courbe C).

Alors on pose :

$$\int_C F dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt$$

Cette quantité s'appelle **intégrale curviligne** de F sur C .

Exemples

$$r(t) = (t, t^n), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$F(x, y) = (-y, x)$$

Interprétation : notion de travail d'une force

Proposition 1.3. Les principales propriétés sont :

$$\int_C (aF_1 + bF_2) dr = a \int_C F_1 dr + b \int_C F_2 dr$$

Si C est paramétré dans un sens par r , dans l'autre par s , on a : $\int_C F dr = - \int_C F ds$.

Si $C = C_1 + C_2$ alors : $\int_C F dr = \int_{C_1} F dr + \int_{C_2} F dr$.

1.3 Champs gradient et indépendance de chemin

Définition 1.4. F champ de vecteurs est un **champ gradient** s'il existe f de U dans \mathbb{R} telle que $F = \nabla f$.

Exemple

$$F(x, y) = (y, x)$$

Théorème 1.5. Si F est un champ de gradient alors $\int_C F dr$ ne dépend que des extrémités de C .

Théorème 1.6. On a équivalence entre :

- F est un champ de gradient.
- $\int_C F dr$ ne dépend que des extrémités de C et ceci pour tout chemin de C .

Proposition 1.7. Si $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ est un champ de gradient alors :

$$\forall i, \forall j, \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

Théorème 1.8. Soit F un champ de vecteurs sur U .

Si U est un ouvert étoilé alors F est un champ de gradient si et seulement si $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ pour tout i et tout j .

1.4 Théorème de Green-Riemann

Soit $S \subset \mathbb{R}^2$ un domaine compact délimité par une courbe fermée, simple et C^1 par morceaux.

On oriente $C = \partial S$ en disant que le sens direct est celui qui laisse S à gauche.

Théorème 1.9. (de Green-Riemann)

Soient S un domaine compact, $C = \partial S$ son bord orienté positivement.

Si $F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ alors $\int_C F dr = \iint_S \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy$.

Démonstration : Dans le cas d'un rectangle $[a, b] \times [c, d]$. Il suffit de calculer successivement les deux termes de l'égalité apparaissant dans l'énoncé du théorème et de constater qu'on obtient le même chose.

$$\begin{aligned} \int_C F dr &= \int_a^b \langle (f_1(x, c), f_2(x, c)), (1, 0) \rangle dx + \int_c^d \langle (f_1(b, y), f_2(b, y)), (0, 1) \rangle dy \\ &\quad + \int_0^{b-a} \langle (f_1(b-t, d), f_2(b-t, d)), (-1, 0) \rangle dt \\ &\quad + \int_0^{d-c} \langle (f_1(a, d-s), f_2(a, d-s)), (0, -1) \rangle ds \\ &= \int_a^b f_1(x, c) dx + \int_c^d f_2(b, y) dy \\ &\quad - \int_a^b f_1(u, d) du \\ &\quad - \int_c^d f_2(a, v) dv \\ &= \int_a^b (f_1(x, c) - f_1(x, d)) dx + \int_c^d (f_2(b, y) - f_2(a, y)) dy. \end{aligned}$$

Attention aux signes dans le calcul précédent (on a posé $u = b - t$ et $v = d - s$ après le deuxième signe =).

$$\begin{aligned} \iint_S \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy &= \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) dx \right) dy - \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_c^d (f_2(b, y) - f_2(a, y)) dy - \int_a^b (f_1(x, d) - f_1(x, c)) dx. \end{aligned}$$

□

Notation

Voici une autre façon, équivalente, d'énoncer la conclusion du théorème de Green-Riemann :

$$\text{Si } F = (P, Q) : \int_C P dx + Q dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

En plus, au lieu de \int_C on écrit parfois \oint_C pour rappeler que le chemin C est une boucle.

Corollaire 1.10. Aire $S = \int_C x dy = \frac{1}{2} \int -y dx + x dy$.

Application de Green-Riemann

Si $G(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ est un changement de variables d'un domaine R à un

domaine $G(R)$ alors :

$$\iint_{G(R)} dx dy = \iint_R |\det J(G)| du dv$$

1.5 Intégrales de surface

1.5.1 Surfaces dans \mathbb{R}^3

On peut décrire une surface de \mathbb{R}^3 de trois manières :

a) Surface de niveau

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = 0\}$ où f est une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

Exemple : $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.

b) Graphe d'une fonction $z = f(x, y)$

Exemple : $z = x^2 + y^2$.

c) Surface paramétrée

Soit $r : T \rightarrow \mathbb{R}^2$ où $T \subset \mathbb{R}^2 : r(u, v) = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}$.

Exemple : sphère, cône en coordonnées sphériques ou cylindriques.

1.5.2 Aire de $S = r(T)$

On a Aire $(T) = \iint 1 du dv$.

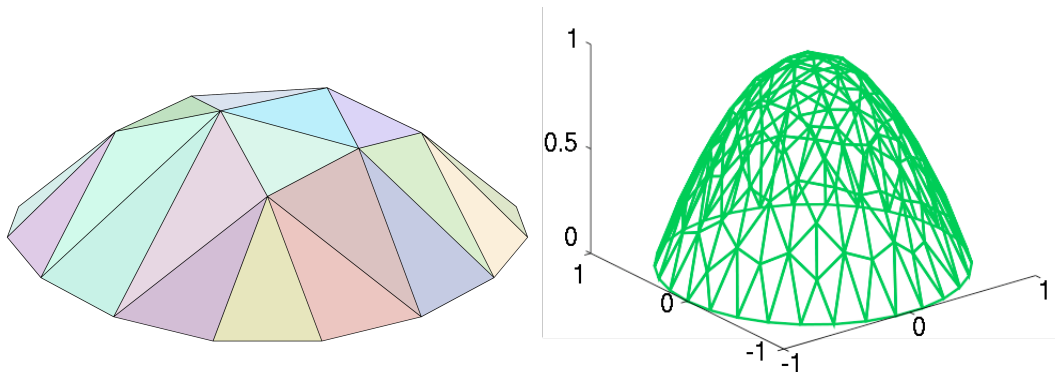
On cherche maintenant à définir l'aire d'une surface paramétrée.

Cas d'une partie plane.

Cas d'une surface paramétrée. Prenons une surface paramétrée par un carré pour simplifier l'écriture.

$$F : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (s, v) \mapsto F(u, v).$$

Comme dans le cas d'une courbe on essaye d'approcher la surface par une surface constituée par la réunion de morceaux de plans.



Posons $x_{i,j} = F(i/n, j/n)$. Lorsque i et j varient de 0 à n on obtient ainsi n^2 points répartis sur la surface. Considérons la surface définie comme la réunion de tous les triangles $[x_{i,j}x_{i,(j+1)}, x_{(i+1),j}]$ et $[x_{i,j}x_{i,(j-1)}, x_{(i-1),j}]$. Cette surface colle de plus en plus à la surface paramétrée lorsque n augmente.

Calculons l'aire d'un triangle $[x_{i,j}x_{i,(j+1)}, x_{(i+1),j}]$. C'est la moitié de la norme du produit vectoriel des vecteurs $x_{i,(j+1)} - x_{i,j}$ et $x_{(i+1),j} - x_{i,j}$. Un développement de Taylor donne

$$\begin{aligned} x_{i,(j+1)} - x_{i,j} &= F(i/n, (j+1)/n) - F(i/n, j/n) \\ &= F'(i/n, j/n)(0, 1/n) + \epsilon(1/n)/n \\ &= \frac{\partial F}{\partial v}(i/n, j/n)/n + \epsilon(1/n)/n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{(i+1),j} - x_{i,j} &= F((i+1)/n, j/n) - F(i/n, j/n) \\ &= F'(i/n, j/n)(1/n, 0) + \epsilon(1/n)/n \\ &= \frac{\partial F}{\partial u}(i/n, j/n)/n + \epsilon(1/n)/n. \end{aligned}$$

Le produit vectoriel est donc égal à

$$\frac{1}{n^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u}(i/n, j/n) \wedge \frac{\partial F}{\partial v}(i/n, j/n) + \epsilon(1/n) \right),$$

et la norme de ce vecteur est

$$\frac{1}{n^2} \left(\left\| \frac{\partial F}{\partial u}(i/n, j/n) \wedge \frac{\partial F}{\partial v}(i/n, j/n) \right\| + \eta(1/n) \right).$$

L'aire du triangle $[x_{i,j}x_{i,(j+1)}, x_{(i+1),j}]$ est donc

$$\frac{1}{2n^2} \left(\left\| \frac{\partial F}{\partial u}(i/n, j/n) \wedge \frac{\partial F}{\partial v}(i/n, j/n) \right\| + \eta(1/n) \right).$$

Le même calcul montre que l'aire du triangle $[x_{i,j}x_{i,(j-1)}, x_{(i-1),j}]$ est aussi

$$\frac{1}{2n^2} \left(\left\| \frac{\partial F}{\partial u}(i/n, j/n) \wedge \frac{\partial F}{\partial v}(i/n, j/n) \right\| + \eta(1/n) \right).$$

Lorsque l'on fait la somme des aires de tous ces triangles on obtient donc la somme

$$\frac{1}{n^2} \left(\sum_{i,j} \left\| \frac{\partial F}{\partial u}(i/n, j/n) \wedge \frac{\partial F}{\partial v}(i/n, j/n) \right\| \right) + \eta(1/n)$$

et la différence de cette somme avec

$$\frac{1}{n^2} \left(\sum_{i,j} \left\| \frac{\partial F}{\partial u}(i/n, j/n) \wedge \frac{\partial F}{\partial v}(i/n, j/n) \right\| \right)$$

tend vers 0. Or lorsque n tend vers l'infini cette somme converge vers l'intégrale double

$$\iint_{[0,1]^2} \left\| \frac{\partial F}{\partial u} \wedge \frac{\partial F}{\partial v} \right\| du dv.$$

C'est donc par cette intégrale double qu'on définit l'aire de la surface paramétrée.

Définition 1.11. On pose : Aire $(S) = \iint_T \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du dv$.

1) Si r est injective alors $S = r(T)$ est une surface paramétrée **simple**.

2) Si $\left\| \frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} \right\| \neq 0$ sur T , alors $S = r(T)$ est dite **lisse** (on suppose r de classe C^1).

Cas particulier : S est définie par $z = f(x, y)$ alors Aire $(S) = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$.

1.5.3 Intégrale de surface

Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée sur $S = r(T)$. Alors :

Définition 1.12. On appelle **intégrale de surface**

$$\iint_{r(T)} f dS = \iint_T f(r(u, v)) \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du dv.$$

Exemple

Calcul d'aire

Recherche de centre de gravité

1.6 Changement de paramétrage

Proposition 1.13. L'intégrale de surface est inchangée quand on change de paramétrage.

2 Aires et volumes de figures courantes

2.1 Boules

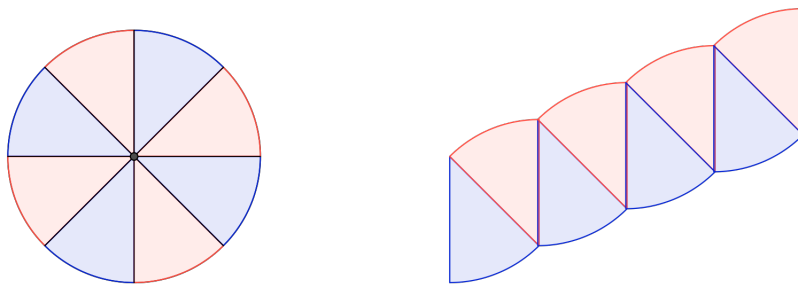
2.1.1 Le périmètre du cercle

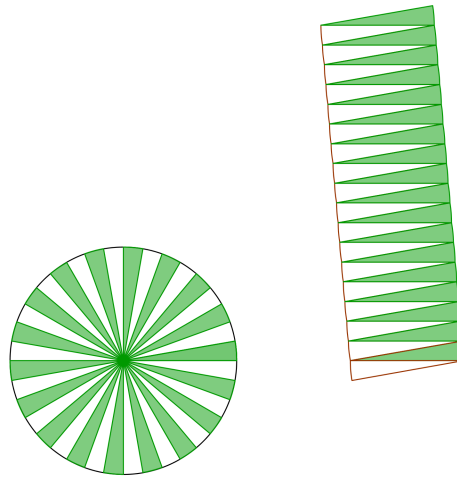
La lettre grecque π est utilisée pour désigner le coefficient de proportionnalité entre le diamètre d'un cercle et son périmètre. C'est sa définition. Mais pour que cette définition ait un sens il faut montrer que le diamètre et le périmètre d'un cercle sont proportionnels. Pourquoi est-ce le cas ? On peut le constater expérimentalement. On peut définir la longueur d'une courbe comme limite de longueur de lignes brisées qui approchent bien la courbe. Dans le cas du cercle par exemple on peut approcher le cercle par la suite des polygones réguliers inscrits dans le cercle. Le théorème de Thalès montre que la longueur de ces polygones est proportionnelle au diamètre du cercle. La limite de ces longueurs, c'est-à-dire le périmètre du cercle, l'est donc aussi.

Muni de cette définition de π , il est alors possible de montrer différentes formules donnant les aires ou volumes de figures courantes.

2.1.2 L'aire du disque

Prenons un disque. Découpons le en quartiers égaux et réarrangeons les.





Lorsqu'on augmente le nombre de parts la figure réarrangée s'approche d'un rectangle de côtés πR et R et elle garde la même aire que le disque. On en déduit que le disque a une aire égale à πR^2 .

On peut retrouver ce résultat grâce au calcul intégral. En intégrant par tranche :

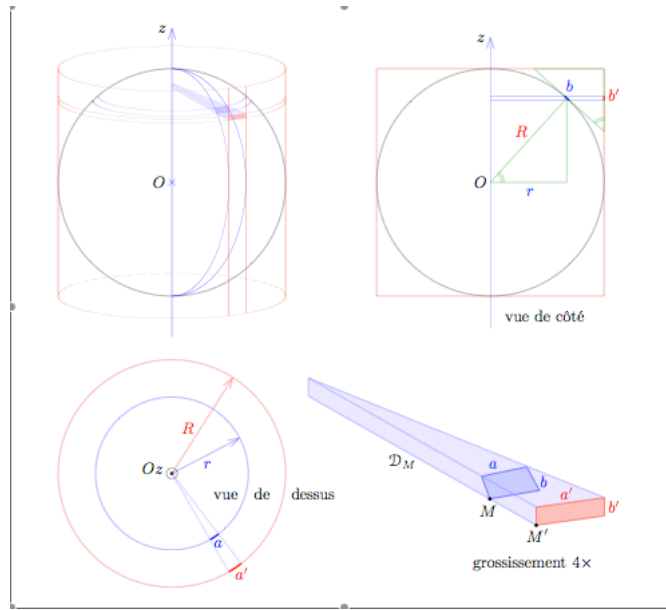
$$\begin{aligned}
 \text{Aire} &= 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx \\
 &= 4 \int_0^{\pi/2} R \cos(t) R \cos(t) dt \\
 &= 4R^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt \\
 &= \pi R^2,
 \end{aligned}$$

calculée grâce au changement de variable $x = R \sin(t)$. On peut aussi (et c'est plus simple quand on connaît l'expression du jacobien du passage en polaires) utiliser les coordonnées polaires

$$\begin{aligned}
 \text{Aire} &= \int_0^R \int_0^{2\pi} r dr d\theta \\
 &= 2\pi \cdot R^2/2 \\
 &= \pi R^2.
 \end{aligned}$$

2.1.3 L'aire de la sphère

Comme archimède



Avec les intégrales On peut calculer l'aire de $S_+ = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0\}$ en utilisant la représentation paramétrée $f(u, v) = (a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v)$. L'application

$$f : [0, 2\pi[\times [0, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (a \cos u \sin v, a \sin u \sin v, a \cos v)$$

définit un paramétrage régulier bijectif de la demi sphère privée du point $(0, 0, a)$. La formule donnant l'aire d'une nappe paramétrée s'écrit

$$\text{Aire}(S_+) = \iint_{[0, 2\pi[\times [0, \pi/2[} \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} \right\| du dv.$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial u} = (-a \sin u \sin v, a \cos u \sin v, 0), \quad \frac{\partial f}{\partial v} = (a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, -a \sin v),$$

donc

$$\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} = (-a^2 \cos u \sin^2 v, -a^2 \sin u \sin^2 v, -a^2 \sin v \cos v),$$

et

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} \right\| = a^2 \sin v.$$

On en déduit

$$\text{Aire}(S_+) = \iint_{[0, 2\pi[\times [0, \pi/2[} a^2 \sin v du dv = a^2 \left(\int_0^{2\pi} du \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin v dv \right) = 2\pi a^2.$$

Pour la sphère entière on trouve $4\pi a^2$ (v varie de 0 à π).

Considérons deux plans sécants au centre de la sphère. Ils délimitent quatre secteurs angulaires dans l'espace et quatre parties de la sphère. L'aire d'une telle partie est proportionnelle à l'angle des demi-plans la définissant. Comme elle vaut $4\pi a^2$ pour un angle de 2π , dans le cas d'un angle α elle vaut $2\alpha a^2$. On peut aussi le voir avec le calcul intégral fait plus haut : au lieu d'intégrer entre 0 et 2π pour u on intègre entre 0 et α . Il faut remarquer ensuite que seul l'angle des plans définissant une telle portion de la sphère importe, pas leur orientation.

Cette remarque simple permet de démontrer le théorème de Girard sur les triangle géodésiques tracés sur la sphère. Un triangle géodésique sur la sphère est un triangle dont les côtés sont formés de grands cercles de la sphère. On appelle géodésique d'une surface les courbes de longueurs minimales entre leurs points. Pour une sphère ces courbes géodésiques sont les grands cercles, c'est-à-dire les intersections de la sphère avec les plans passant par le centre de la sphère.

Théorème 2.1. (*Girard*) Soit ABC un triangle géodésique tracé sur la sphère de rayon R d'angles aux sommets α, β, γ . Alors on a la relation suivante

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \mathcal{A}/R^2,$$

où \mathcal{A} désigne l'aire du triangle ABC .

La relation liant les angles d'un triangle du plan doit donc être modifiée (on la retrouve comme cas limite lorsque R tend vers l'infini).

Démonstration Il suffit de voir que les quartiers d'orange d'angles α, β et γ dont les sommets sont ceux du triangle ABC recouvrent l'équivalent d'une demi-sphère plus deux fois le triangle ABC on obtient donc $2(\alpha + \beta + \gamma)R^2 = 2\pi R^2 + 2\mathcal{A}$ ce qui donne l'égalité souhaitée. \square

Corollaire 2.2. Soit P un polygone géodésique à n côtés tracé sur la sphère, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les angles en ses sommets, \mathcal{A} son aire. On a :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = (n - 2)\pi + \mathcal{A}/R^2.$$

De ce théorème on déduit la formule d'Euler-Poincaré pour un polyèdre convexe.

Théorème 2.3. Soit P un polyèdre convexe. On appelle s le nombre de ses sommets, a le nombre de ses arêtes, f le nombre de ses faces. On a :

$$a + 2 = f + s.$$

Démonstration Plaçons P à l'intérieur d'une sphère, le centre de la sphère étant à l'intérieur de P . Projetons ensuite P sur la sphère à partir du centre. Les faces du polyèdre

deviennent des polygones géodésiques. La somme des aires de ces polygones est l'aire de la sphère $4\pi R^2$. Lorsqu'on fait la somme de tous les angles on obtient 2π fois le nombre de sommets de P . On obtient donc d'une part

$$\sum_{\mathcal{F}} \left(\sum_{\mathcal{S}_F} \alpha_S - (n_F - 2)\pi \right) = 4\pi,$$

d'autre part

$$\sum_{\mathcal{F}} \sum_{\mathcal{S}_F} \alpha_S = \sum_{S \in \mathcal{S}} \alpha_S = 2\pi s.$$

Cela fournit l'égalité

$$2\pi s - \sum_{\mathcal{F}} n_F \pi + 2\pi f = 4\pi.$$

Mais la somme $\sum_{\mathcal{F}} n_F$ est égale à $2a$ (lorsqu'on fait la somme des nombres de côtés des faces on compte deux fois chaque arête). Finalement, on a

$$2\pi(s - a + f) = 4\pi,$$

soit

$$s + f = a + 2.$$

□

Exemples : Pour le cube on a $a = 12$, $f = 6$, $s = 8$ et $12+2=6+8$. Pour le tétraèdre on a $a = 6$, $f = 4$, $s = 4$ et $6+2=4+4$. On pourra vérifier cette formule pour le dodécaèdre, l'icosaèdre,...

2.1.4 Le volume de la boule

À la grecque En tranche En sphériques

2.1.5 Et en dimension plus grande ?

2.2 Solides de révolution

Soit f une fonction positive ou nulle définie sur un intervalle $[a, b]$. Considérons la partie de l'espace définie de la façon suivante :

$$V = \{(x, y, z) / x \in [a, b], \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}.$$

C'est le solide obtenu en faisant tourner le graphe de f autour de l'axe des x . Le volume de V est donné par l'intégrale triple

$$\iiint_V dx dy dz.$$

En intégrant par tranche (d'abord en y , z , puis en x) on obtient :

$$\iiint_V dx dy dz = \int_a^b \left(\iint_{\{(y,z) / \sqrt{y^2+z^2} \leq f(x)\}} dy dz \right) dx = \int_a^b \pi f(x)^2 dx.$$

Le calcul de l'intégrale triple se ramène donc à un calcul d'intégrale simple.

2.3 Cônes

Ce qu'on appelle un cône a un sommet et une base. La formule pour le volume d'un cône est la suivante : aire de la base fois la hauteur divisé par trois. Montrons-le grâce au calcul. C'est très simple

$$\begin{aligned} \int_0^H \text{Aire}(\text{hauteur}h) dh &= \int_0^H \text{Aire}(\text{hauteur}H) h^2 / H^2 dh \\ &= \text{Aire}(\text{hauteur}H) / H^2 \int_0^H h^2 dh \\ &= \text{Aire}(\text{hauteur}H) / H^2 \cdot H^3 / 3 = \text{Aire}(\text{hauteur}H) H / 3. \end{aligned}$$

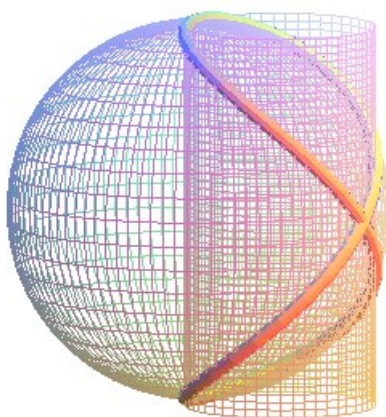
2.4 Fenêtre et temple de Viviani

¹ ENIGME GEOMETRIQUE DE LA MERVEILLEUSE CONSTRUCTION DE LA VOUTE HEMISPHERIQUE QUARRABLE

proposée par D. PIO LISCI PUSILLO géomètre, le 4 avril 1692, dont on espère la résolution par les arts secrets des fameux Analystes de l'âge présent, puisque l'homme versé seulement dans les travaux de la pure Géométrie est incapable, semble-t-il, d'accéder à de tels mystères.

Parmi les vénérables monuments de la savante Grèce antique, se dresse encore, destiné à durer éternellement, un Temple très auguste à plan circulaire, dédié à la FÉCONDE GEOMÉTRIE, qui est recouvert d'une coupole parfaitement hémisphérique à l'intérieur : mais dans cette coupole quatre fenêtres d'aires égales (disposées autour et sur la base de l'hémisphère même) sont construites de telle configuration, de telles grandeur, avec une telle industrie et une telle intelligence que, celles-ci ôtées, la surface courbe restant de la coupole, ornée d'un travail précieux, peut être quarrée géométriquement. On demande simplement quelle est cette partie quarrable de la surface hémisphérique tendue comme une voile marine gonflée, par quelle méthode ou par quel art fut-elle obtenue par l'Architecte Géomètre, et à quelle surface plane quarrable enfin elle est égale ?

1. Pour plus de détails on pourra se reporter au document suivant : http://www.numdam.org:80/numdam-bin/item?id=CSHM_1987__8__203_0.



Calcul de l'aire de la fenêtre : À faire.

Calcul du volume du temple : Le calcul se fait en coordonnées polaires. Il s'agit de trouver le volume de l'ensemble compact

$$D = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq x, z \geq 0\}.$$

En coordonnées polaires cet ensemble est décrit par :

$$\Delta = \{(\rho, \theta, z) / \rho^2 + z^2 \leq 1, \rho \leq \cos(\theta), z \geq 0\}.$$

On intègre par tranche : ρ est fixé entre 0 et 1, θ varie de $-\arccos(\rho)$ à $\arccos(\rho)$, z de 0 à $\sqrt{1 - \rho^2}$. La formule de changements de variables donne :

$$\begin{aligned} \iint_D dx dy dz &= \int_{\Delta} \rho d\rho d\theta dz \\ &= \int_0^1 \left[\int_{-\arccos(\rho)}^{\arccos(\rho)} \left(\int_0^{\sqrt{1-\rho^2}} \rho dz \right) d\theta \right] d\rho \\ &= \int_0^1 2\rho \sqrt{1-\rho^2} \arccos(\rho) d\rho \\ &= [-2/3 \cdot (1-\rho^2)^{3/2} \arccos(\rho)]_0^1 - 2/3 \cdot \int_0^1 (1-\rho^2) d\rho \\ &= \pi/3 - 4/9. \end{aligned}$$

3 Champs de vecteurs

Soient $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ défini sur $S = r(T)$.

Soit $N = \frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v}$ la normale à S , et $n = \frac{N}{\|N\|}$ la normale unitaire.

Définition 3.1. On appelle **flux de F à travers S** l'intégrale $\iint F \cdot n \, dS$.

Proposition 3.2. On a $\iint_S F \cdot n \, dS = \iint_T F(r(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} \right) du \, dv$.

Exemple

Calculer le flux de $(y, -x, 1)$ à travers la demi sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$.

Notation : le flux se note $\iint P \, dy \wedge dz + Q \, dz \wedge dx + R \, dx \wedge dy$.

3.1 Théorème de Stokes

Définition 3.3. Soit $F = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ un champ de vecteurs de classe C^1 dans \mathbb{R}^3 . Le **rotationnel** de F est

$$\text{rot}(F) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Formellement, avec la notation $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, on peut définir $\text{rot}(F) = \nabla \wedge F$.

Théorème 3.4. (Stokes)

Soit F un champ de vecteurs de classe C^1 , défini sur un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^3 qui contient S . Supposons que le bord de S est une courbe C . Alors on a :

$$\int_S (\text{rot } F) \cdot n \, dS = \int_C F \, d\alpha.$$

Remarque

Dans le cas où $S \subset \mathbb{R}^2$, on retrouve Green-Riemann.

Exemple

Vérification de Stokes avec S parabolöide $z = 4x^2 - y^2, z \geq 0 : F(x, y, z) = (z - y, z + x, -x - y)$.

3.2 Interprétation physique - Notion de flux conservatif

3.3 Démonstration du théorème de Stokes

dans le cas où S est donnée par $z = f(x, y)$

3.4 Divergence - Théorème de Gauss Ostrogradsky

Définition 3.5. Soit $F = (F_1, F_2, F_3)$ un champ de vecteurs de classe C^1 dans \mathbb{R}^3 . La divergence de F est

$$\operatorname{div}(F) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Formellement, on peut écrire $\operatorname{div}(F) = \nabla \cdot F$.

Théorème 3.6. Soit $V \subset \mathbb{R}^3$ un volume délimité par une surface S fermée et orientée. Soient n le vecteur unitaire normal vers l'extérieur et F un champ de vecteurs de classe C^1 .

Alors :

$$\iiint_V \operatorname{div}(F) \, dx \, dy \, dz = \iint_S F \cdot n \, dS$$

Démonstration. : D'abord dans le cas d'un cube.

$$\begin{aligned} \iiint_{[0,1]^3} \operatorname{div}(F) \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{[0,1]^3} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz \\ &= \iint_{[0,1]^2} \left(\int_0^1 \frac{\partial F_1}{\partial x} dx \right) dy \, dz + \iint_{[0,1]^2} \left(\int_0^1 \frac{\partial F_2}{\partial y} dy \right) dx \, dz \\ &\quad + \iint_{[0,1]^2} \left(\int_0^1 \frac{\partial F_3}{\partial z} dz \right) dx \, dy \\ &= \iint_{[0,1]^2} (F_1(1, y, z) - F_1(0, y, z)) dy \, dz \\ &\quad + \iint_{[0,1]^2} (F_2(x, 1, z) - F_2(x, 0, z)) dx \, dz \\ &\quad + \iint_{[0,1]^2} (F_3(x, y, 1) - F_3(x, y, 0)) dx \, dy \end{aligned}$$

Écrivons maintenant la deuxième intégrale. C'est la somme des intégrales correspondant à chacune des six faces du cube.

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot n \, dS &= \iint_{[0,1]^2} \langle F(1, y, z), (1, 0, 0) \rangle dy \, dz + \iint_{[0,1]^2} \langle F(0, y, z), (-1, 0, 0) \rangle dy \, dz \\ &\quad + \iint_{[0,1]^2} \langle F(x, 1, z), (0, 1, 0) \rangle dx \, dz + \iint_{[0,1]^2} \langle F(x, 0, z), (0, -1, 0) \rangle dx \, dz \\ &\quad + \iint_{[0,1]^2} \langle F(x, y, 1), (0, 0, 1) \rangle dx \, dy + \iint_{[0,1]^2} \langle F(x, y, 0), (0, 0, -1) \rangle dx \, dy \end{aligned}$$

En exprimant les produits scalaires apparaissant dans ces intégrales on retrouve la même expression que plus haut. Cela montre que le théorème est vrai pour le cube $[0, 1]^3$. Le même calcul montre qu'il en est de même pour tous les cubes.

Si on colle deux cubes l'intégrale de volume sur la réunion des cubes est la somme des deux intégrales. C'est la même chose pour l'intégrale de surface, mais les intégrales correspondant à la face commune sont opposées l'une de l'autre (car les vecteurs normaux correspondant sont opposés). La somme des intégrales de surface est donc l'intégrale de surface du pavé obtenu comme réunion des deux cubes. De cette façon on montre que le théorème est vrai pour toute réunion de cubes.

On peut approcher un domaine par une réunion de cubes. Les intégrales de volume (sur le domaine et sur la réunion de cubes approchante) seront proches. Reste à voir que ce sera aussi le cas pour les intégrales de surface.

Cas d'un volume de la forme $V = \{(x_1, x_2, x_3) / (x_1, x_2) \in [0, 1]^2, 0 \leq x_3 \leq \phi(x_1, x_2)\}$.

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iint_{[0,1]^2} \langle F(x, y, \phi(x, y)), (-\frac{\partial \phi}{\partial x}, -\frac{\partial \phi}{\partial y}, 1) \rangle dx dy$$