# COURS 8 : Limites de fonctions (suite)

## 0.1 Limites finies en l'infini

**Définition 0.1.** *Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $[A, +\infty[$. On dit que $f$ tend vers $l$ en l'infini ou que $f(x)$ tend vers $l$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ si*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists M \in \mathbb{R} \ (x > M \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon).$$

*Dans ce cas on écrit* $\lim_{+\infty} f = l$ *ou* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$.

**Proposition 0.2.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions telles que* $\lim_{+\infty} f = l$ *et* $\lim_{+\infty} g = l'$ *, alors* $\lim_{+\infty} f + g = l + l'$.

Démonstration
Il s'agit de montrer que

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists M \in \mathbb{R} \ (x > M \Rightarrow |f(x) + g(x) - (l + l')| < \epsilon).$$

Soit $\epsilon > 0$.
Prenons $M_1 > 0$ tel que pour $x > M_1$ on ait $|f(x) - l| < \epsilon/2$ (un tel $M_1$ existe car $\lim_{+\infty} f = l$).
Prenons $M_2 > 0$ tel que pour $x > M_2$ on ait $|g(x) - l'| < \epsilon/2$ (un tel $M_2$ existe car $\lim_{+\infty} g = l'$).
Posons $M = \max(M_1, M_2)$. Alors pour $x > M$ on a

$$|f(x) + g(x) - (l + l')| \leq |f(x) - l| + |g(x) - l'| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

□

**Proposition 0.3.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions telles que* $\lim_{+\infty} f = l$ *et* $\lim_{+\infty} g = l'$ *, alors* $\lim_{+\infty} fg = ll'$.

Démonstration
Il s'agit de montrer que

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists M \in \mathbb{R} \ (x > M \Rightarrow |f(x)g(x) - ll'| \leq \epsilon).$$

Soit $\epsilon > 0$.
Prenons $M_1 > 0$ tel que pour $x > M_1$ on ait $|f(x) - l| < 1$ (un tel $M_1$ existe car $\lim_{+\infty} f = l$). Pour $x > M_1$ on a $|f(x)| \leq |l| + 1$.
Prenons $M_2 > 0$ tel que pour $x > M_2$ on ait $|f(x) - l| < \frac{\epsilon}{2(|l'|+1)}$ (un tel $M_2$ existe car $\lim_{+\infty} f = l$).
Prenons $M_3 > 0$ tel que pour $x > M_3$ on ait $|g(x) - l'| < \frac{\epsilon}{2(|l|+1)}$ (un tel $M_3$ existe car $\lim_{+\infty} g = l'$).
Posons $M = \max(M_1, M_2, M_3)$. Alors pour $x > M$ on a

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - ll'| &= |f(x)g(x) - f(x)l' + f(x)l' - ll'| \\
&\leq |f(x)g(x) - f(x)l'| + |f(x)l' - ll'| \\
&\leq |f(x)||g(x) - l'| + |f(x) - l||l'| \\
&\leq (|l| + 1) \times \frac{\epsilon}{2(|l| + 1)} + \frac{\epsilon}{2(|l'| + 1)} \times |l'| \\
&\leq \epsilon.
\end{aligned}$$

□

**Proposition 0.4.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions telles que $\lim_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim_{+\infty} g = l' > 0$ alors $\lim_{+\infty} fg = +\infty$.*

**Proposition 0.5.** *(Caractérisation séquentielle) Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $[A, +\infty[$. La fonction $f$ tend vers $l$ en $+\infty$ si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_n$ tendant vers $+\infty$, la suite $(f(u_n))_n$ tend vers $l$.*

Démonstration
Supposons que la fonction $f$ tende vers $l$ en $+\infty$. Soit $(u_n)_n$ un suite tendant vers $+\infty$. On veut montrer que $(f(u_n))_n$ tend vers $l$. Soit $\epsilon > 0$.
Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que pour $x > M$ on ait $|f(x) - l| < \epsilon$ (un tel $M$ existe puisque par hypothèse $f$ tend vers $l$ en $+\infty$).
Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n > N$ on ait $u_n > M$ (un tel $N$ existe puisque par hypothèse $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$).
Alors pour $n > N$ on a $|f(u_n) - l| < \epsilon$.
On a donc montré que pour tout $\epsilon > 0$, il était possible de trouver un rang $N$ tel que pour $n > N$ on ait $|f(u_n) - l| < \epsilon$. Cela signifie exactement que $(f(u_n))_n$ tend vers $l$.

Pour montrer l'implication réciproque nous nous montrons sa contraposée. Supposons que la fonction $f$ ne tende pas vers $l$ en $+\infty$.
La phrase

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists M \in \mathbb{R} \ (x > M \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon).$$

est fausse. Autrement dit la négation de cette phrase

$$\exists \epsilon > 0 \ \forall M \in \mathbb{R} \ \exists x > M, |f(x) - l| > \epsilon$$

est vraie. Prenons $R$ tel que

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists x > M, |f(x) - l| > \epsilon.$$

Soit $u_0 > 0$ tel que $|f(u_0) - l| > \epsilon$ (un tel $u_0$ existe ; prendre $M = 0$ dans la phrase précédente).
Soit $u_1 > u_0 + 1$ tel que $|f(u_1) - l| > \epsilon$ (un tel $u_1$ existe ; prendre $M = u_0 + 1$).
Soit $u_2 > u_1 + 1$ tel que $|f(u_2) - l| > \epsilon$ (un tel $u_2$ existe ; prendre $M = u_1 + 1$).
On construit ainsi par récurrence une suite $(u_n)_n$ tel que, pour tout $n$, on ait $u_n > n$ et $|f(u_n) - l| > \epsilon$. On obtient donc une suite $(u_n)_n$ tendant vers $+\infty$ telle que $(f(u_n))_n$ ne tende pas vers $l$. $\square$