COURS 7 : Limites de fonctions

0.1 Limites infinies en l'infini

Définition 0.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle $[A, +\infty[$. On dit que f tend vers plus l'infini en l'infini ou que $f(x)$ tend vers plus l'infini lorsque x tend vers $+\infty$ si*

$$\forall R \in \mathbb{R} \exists M \in \mathbb{R}(x > M \Rightarrow f(x) > R).$$

Dans ce cas on écrit $\lim_{+\infty} f = +\infty$ *ou* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Cette phrase mathématique se lit : pour tout R dans $\mathbb{R}$ il existe M dans $\mathbb{R}$ tel que si x est supérieur à M alors $f(x) > R$. Les écritures

$$\forall R \geq 10 \exists M \in \mathbb{R}(x > M \Rightarrow f(x) > R),$$

$$\forall R > 1000 \exists M \in \mathbb{R}(x > M \Rightarrow f(x) > R),$$

$$\forall R > -1002 \exists M \in \mathbb{R}(x > M \Rightarrow f(x) > R)$$

sont équivalentes et équivalentes à la définition. En effet, la plus faible des trois écritures (quatre en comptant la définition) est

$$\forall R > 1000 \exists M \in \mathbb{R}(x > M \Rightarrow f(x) > R).$$

Montrons que si cette propriété est vraie alors celle de la définition l'est aussi. On veut montrer

$$\forall R \in \mathbb{R} \exists M \in \mathbb{R}(x > M \Rightarrow f(x) > R).$$

Soit $R \in \mathbb{R}$.
Si $R > 1000$ alors par hypothèse on peut trouver M tel que pour $x > M$ on ait $f(x) > R$.
En particulier il existe M_1 tel pour $x > M_1$ on ait $f(x) > 1001$.
Si $R \leq 1000$. Pour $x > M_1$ on a $f(x) > 1001 > R$.
Finalement dans tous les cas il est possible de trouver M tel que pour $x > M$ on ait $f(x) > R$.

Quand on dit que pour tout R la valeur R est dépassée, en général plus R est grand et plus il faut aller loin pour la dépasser.

Exemples.

La fonction $f(x)$ définie par $f(x) = x$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Démontrons le. Soit $R \in \mathbb{R}$. Posons $M = R$. Alors pour $x > M$ on a $x > R$.

La fonction $f(x)$ définie par $f(x) = x^2$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Démontrons le. Soit $R \in \mathbb{R}$. On peut essayer de prendre $M = R$. Mais cela ne marchera pas entre o et 1. Dessin.

Plusieurs formulation sont possibles. En voici deux.

Soir $R > 1$. Posons $M = R$. Alors pour $x > M$ on a $f(x) = x^2 > x.1 = x > M = R$. On a donc

$$\forall R > 1 \exists M \in \mathbb{R}(x > M \Rightarrow f(x) > R),$$

ce qui signifie que $f(x)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ comme nous l'avons vu.

Soir $R > 0$. Posons $M = \sqrt{R}$. Alors pour $x > M$ on a $f(x) = x^2 > M^2 = R$. On a donc

$$\forall R > 0 \exists M \in \mathbb{R}(x > M \Rightarrow f(x) > R),$$

ce qui signifie que $f(x)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

La deuxième démonstration montre qu'il suffit que x soit supérieur à $\sqrt{R}$ pour que $f(x)$ dépasse le niveau $R > 0$. On a donc une information sur la vitesse de divergence de f plus précise que dans la première formulation. Aucune information sur cette vitesse de convergence n'est contenue dans la définition de $f(x) = x$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Pour les fonctions classiques il est souvent techniquement facile de montrer que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ quand c'est le cas. Faire entrer des calculs simples dans une démonstration se ramenant à la définition est une chose assez difficile au début.

Exercice : Montrer que la fonction définie par $f(x) = x^3 - 7x^2 + 8x - 11$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Définition 0.2. *Soit f une fonction définie sur un intervalle $[A, +\infty[$. On dit que f tend vers moins l'infini en plus l'infini ou que $f(x)$ tend vers moins l'infini lorsque x tend vers $+\infty$ si*

$$\forall R \in \mathbb{R} \exists M \in \mathbb{R}(x > M \Rightarrow f(x) < R).$$

Dans ce cas on écrit $\lim_{+\infty} f = -\infty$ ou $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Remarquez que la phrase mathématique contient presque les mêmes signes. Le changement de $f(x) > R$ en $f(x) < R$ modifie radicalement le sens de la phrase. Les écritures

$$\forall R \leq 10 \exists M \in \mathbb{R}(x > M \Rightarrow f(x) \leq R),$$

$$\forall R < 0 \exists M \in \mathbb{R}(x > M \Rightarrow f(x) < R)$$

sont équivalentes et équivalentes à la définition.

Proposition 0.3. *Soient f et g deux fonctions telles que $\lim_{+\infty} f = +\infty$ et g soit minorée, alors $\lim_{+\infty} f + g = +\infty$.*

Proposition 0.4. *Soient f et g deux fonctions telles que $\lim_{+\infty} f = +\infty$ et g soit minorée par un nombre strictement positif, alors $\lim_{+\infty} fg = +\infty$.*

Proposition 0.5. *Soient f et g deux fonctions telles que $\lim_{+\infty} f = +\infty$ et g soit majorée par un nombre strictement négatif, alors $\lim_{+\infty} fg = -\infty$.*

Proposition 0.6. *(Caractérisation séquentielle) Soit f une fonction définie sur un intervalle $[A, +\infty[$. La fonction f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_n$ tendant vers $+\infty$, la suite $(f(u_n))_n$ tend vers $+\infty$.*

Démonstration
Supposons que la fonction f tende vers $+\infty$ en $+\infty$. Soit $(u_n)_n$ un suite tendant vers $+\infty$. On veut montrer que $(f(u_n))_n$ tend vers $+\infty$. Soit $R \in \mathbb{R}$.
Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que pour $x > M$ on ait $f(x) > R$ (un tel M existe puisque par hypothèse f tend vers $+\infty$ en $+\infty$).
Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n > N$ on ait $u_n > M$ (un tel N existe puisque par hypothèse $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$).
Alors pour $n > N$ on a $f(u_n) > R$.
On a donc montré que pour tout R, il était possible de trouver un rang N tel que pour $n > N$ on ait $f(u_n) > R$. Cela signifie exactement que $(f(u_n))_n$ tend vers $+\infty$.

Pour montrer l'implication réciproque nous nous montrons sa contraposée. Supposons que la fonction f ne tende pas vers $+\infty$ en $+\infty$.
La phrase

$$\forall R \in \mathbb{R} \exists M \in \mathbb{R} (x > M \Rightarrow f(x) > R)$$

est fausse. Autrement dit la négation de cette phrase

$$\exists R \in \mathbb{R} \forall M \in \mathbb{R} \exists x > M, f(x) < R$$

est vraie. Prenons R tel que

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists x > M, f(x) < R.$$

Soit $u_0 > 0$ tel que $f(u_0) < R$ (un tel u_0 existe ; prendre $M = 0$ dans la phrase précédente).
Soit $u_1 > u_0 + 1$ tel que $f(u_1) < R$ (un tel u_1 existe ; prendre $M = u_0 + 1$).
Soit $u_2 > u_1 + 1$ tel que $f(u_2) < R$ (un tel u_2 existe ; prendre $M = u_1 + 1$).
On construit ainsi par récurrence une suite $(u_n)_n$ tel que, pour tout n, on ait $u_n > n$ et $f(u_n) < R$. On obtient donc une suite $(u_n)_n$ tendant vers $+\infty$ telle que $(f(u_n))_n$ ne tende pas vers $+\infty$. $\square$

Exemple : la fonction définie par $f(x) = x \sin x$ ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$. Il suffit de onsidérer la suite $(u_n)_n = (\pi n)_n$. Elle tend vers l'infini et, pour tout n, on $f(u_n) = \pi n \sin(\pi n) = 0$ donc la suite $(f(u_n))_n$ ne tend pas vers $+\infty$.