COURS 6 : La droite réelle (suite)

Définition 0.1. *Soit X une partie de $\mathbb{R}$. On dit que X est* dense *dans $\mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$ rencontre X (c'est-à-dire contient au moins un élément de X).*

Proposition 0.2. *Soit X une partie de $\mathbb{R}$. Pour que X soit dense dans $\mathbb{R}$ il faut et il suffit que tout point de $\mathbb{R}$ soit limite d'une suite d'éléments de X.*

<u>Démonstration</u>

• Supposons que X soit dense dans $\mathbb{R}$. On veut montrer que tout élément x de $\mathbb{R}$ est limite d'une suite de point de X.
Soit x un élément de $\mathbb{R}$. Soit $n \geq 0$. Comme X est dense dans $\mathbb{R}$, il existe un élément $x_n \in X$ tel que $x - 2^{-n} < x_n < x + 2^{-n}$. En choisissant un tel élément x_n pour tout n, on obtient une suite (x_n) d'éléments de X telle que, pour tout n, on ait $|x - x_n| < 2^{-n}$. En particulier une telle suite converge vers x.

• Supposons que tout élément x de $\mathbb{R}$ est limite d'une suite de points de X. Montrons qu'alors X est dense dans $\mathbb{R}$.
Soient x, y deux élément de $\mathbb{R}$ tels que $x < y$. Le milieu de l'intervalle $[x, y]$ est limite d'une suite (x_n) d'éléments de X. Prenons n tel que $|x_n - (x + y)/2| < (y - x)/2$. Alors $x_n \in X$ et $(x + y)/2 - (y - x)/2 < x_n < (x + y)/2 - (y - x)/2$ soit $x < x_n < y$. □

Cardinal d'un ensemble

Le cardinal d'un ensemble fini est le nombre d'éléments de l'ensemble. Lorsqu'un ensemble est infini comment définir le nombre de ses éléments ?

Définition 0.3. *On dit que deux ensembles E et F ont même cardinal s'il existe une bijection de E dans F.*

Établir une bijection entre un ensemble et une partie de $\mathbb{N}$ de la forme $\{1, \ldots, n\}$ est bien ce qu'on fait quand on compte (injection : on ne compte qu'une fois chaque élément, surjection : on compte tous les éléments).

Définition 0.4. *On dit qu'un ensemble est dénombrable*[1] *s'il a le même cardinal que $\mathbb{N}$.*

[1] http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_dénombrable

Théorème 0.5. *(de Cantor-Bernstein) Soient E et F deux ensembles. S'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E alors il existe une bijection de E dans (ou sur) F.*

Application : L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable. Il suffit de trouver une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$ et une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$. Pour la première c'est facile : on a l'injection canonique de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$. Pour la deuxième on peut considérer l'application définie par

$$\phi \ : \ p/q \mapsto 2^p 5^q \text{ si } p \geq 0, \quad 3^{-p} 5^q \text{ si } p < 0,$$

où un rationnel est écrit sous forme irréductible p/q avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Exercice : montrer que cette application est injective.

Théorème 0.6. *L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable : il a plus d'éléments que $\mathbb{N}$.*

La méthode de Cantor[2]

Supposons que $[0,1[$ soit dénombrable. Alors on peut écrire

$$[0,1[= \{x_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Chacun des nombres x_n admet un développement décimal propre :

$$x_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j^{(n)}}{10^j}.$$

Considérons alors la suite $(b_j)_j$ de la façon suivante

$$b_j = 1 \text{ si } a_j^{(j)} \neq 1, \quad 2 \text{ si } a_j^{(j)} = 1.$$

La somme $y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{10^j}$ définit un élément de $[0,1[$ qui n'est égal à aucun des x_n (car le $n$ième chiffre après la virgule de y est différent du $n$ième chiffre après la virgule de x_n et que le nombre y a un unique développement décimal).

On peut être plus précis. Voici un résultat plus fin du même type.

[2] http://fr.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor

Théorème 8.2.1 *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels connus, et si $[a,b]$ est un intervalle rationnel (avec $b > a$) on peut construire un $x \in [a,b]$ tel que pour tout n, $|x - u_n| > |b-a|/3^{n+2}$.*

Démonstration. Cette preuve est délicate. On recommande vivement à la lectrice de faire des petits dessins pour « voir » les intervalles successifs qui interviennet dans la preuve, avec les différents cas de figure possibles.

Posons $[a,b] = [a_1,b_1]$ et $\ell = b - a$. Nous sommes à l'étape 1. Puisque le réel u_0 est connu, on connaît un intervalle rationnel $]e_1, f_1[$ de longueur $\ell/9$ sur lequel est situé u_0. On pose $c_1 = e_1 - \ell/9$, $d_1 = f_1 + \ell/9$ de sorte que $]c_1, d_1[$ est un intervalle rationnel de longueur $\ell/3$ et tout élément x de $[a_1,b_1]\setminus]c_1,d_1[$ vérifie $|x - u_0| \geq \ell/9$. L'ensemble $[a_1,b_1]\setminus]c_1,d_1[$ est formé de un ou deux intervalles rationnels, dont la longueur totale est $\geq 2\ell/3$ (il est recommandé de faire un dessin pour voir les différents cas de figures). Il contient donc un intervalle rationnel $[a_2,b_2]$ de longueur $\ell/3$. Tout élément x de $[a_2,b_2]$ vérifie $|x - u_0| \geq \ell/9$.

Il reste à itérer le processus. Nous précisons l'hypothèse de récurrence comme suit.

Au début de l'étape n on dispose d'un intervalle $[a_n,b_n]$ de longueur $\ell/3^{n-1}$, avec la propriété que tout élément $x \in [a_n,b_n]$ vérifie $|x - u_k| \geq \ell/3^{k+2}$ pour $k = 0,\ldots,n-2$.

On connaît un intervalle rationnel $]e_n, f_n[$ de longueur $\ell/3^{n+1}$ sur lequel est situé u_{n-1}. On pose $c_n = e_n - \ell/3^{n+1}$, $d_n = f_n + \ell/3^{n+1}$ de sorte que $]c_n,d_n[$ est un intervalle rationnel de longueur $\ell/3^n$ et tout élément x de $[a_n,b_n]\setminus]c_n,d_n[$ vérifie $|x - u_{n-1}| \geq \ell/3^{n+1}$. L'ensemble $[a_n,b_n]\setminus]c_n,d_n[$ est formé de un ou deux intervalles rationnels, dont la longueur totale est $\geq 2\ell/3^n$. Il contient donc un intervalle rationnel $[a_{n+1},b_{n+1}]$ de longueur $\ell/3^n$. Et tout élément $x \in [a_{n+1},b_{n+1}]$ vérifie $|x - u_k| \geq \ell/3^{k+2}$ pour $k = 0,\ldots,n-1$. La récurrence fonctionne bien.

Enfin la limite commune des suites (a_n) et (b_n) est un réel x qui appartient à chacun des intervalles $[a_k,b_k]$ parce qu'il s'agit d'une suite d'intervalles emboités. En conséqence on a $|x - u_k| \geq \ell/3^{k+2}$ pour tout k, ce qui était le but récherché. □

Théorème 0.7. *Soit E un ensemble. Il n'existe pas de surjection de E sur l'ensemble des parties de E.*

Démonstration Supposons qu'une surjection $\phi \ : \ E \to \mathcal{P}(E)$ existe. Considérons alors la partie A de E défini par

$$A = \{x \in E \ / \ x \notin \phi(x)\}$$

L'application ϕ étant surjective, il existe $a \in E$ tel que $A = \phi(a)$. Alors si $a \in \phi(a)$, $a \notin A$ (par définition de A), *i.e.* $a \notin \phi(a)$ (car $A = \phi(a)$) ; et si $a \notin \phi(a)$, $a \in A$ (par définition de A), *i.e.* $a \in \phi(a)$. La supposition faite est donc absurde. $\square$

Ce raisonnement rappelle ce qu'on appelle le paradoxe de Russell[3] ou encore le paradoxe du barbier[4].

Les ensembles dénombrables sont négligeables

Nous avons vu plus haut que l'ensemble des nombres réels était « plus gros »que l'ensemble des nombres entiers. Nous avons vu aussi que l'ensemble des nombres rationnels était dénombrable donc a le même « nombre »d'éléments que $\mathbb{N}$. L'ensemble des nombres rationnels est dense dans $\mathbb{R}$.

Nous allons voir maintenant que les ensembles dénombrables de $\mathbb{R}$ sont négligeables.

Définition 0.8. *Soit E une partie de $\mathbb{R}$. On dit que E est négligeable si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une réunion finie ou dénombrable d'intervalles (I_i) telle que E soit incluse dans la réunion des intervalles*

$$E \subset \cup_i I_i$$

et la somme des longueurs des intervalles I_i est inférieure à ϵ.

Commentaires : on dit que (I_i) forme un recouvrement de E. Ce que dit la définition c'est que pour chaque ϵ on peut trouver une famille d'intervalles recouvrant E dont la somme des longueurs est inférieure à ϵ. Les intervalles dépendent de ϵ.

Un ensemble constitué d'un seul point est négligeable. Prenons $E = \{a\}$. Soit $\epsilon > 0$. L'intervalle $]a - \epsilon/3, a + \epsilon/3[$ contient E et est de longueur $2\epsilon/3 < \epsilon$.

Un ensemble fini est négligeable. Prenons $E = \{a_1, \dots, a_l\}$. Soit $\epsilon > 0$. Posons $I_k =]a_k - \epsilon/3l, a_k + \epsilon/3l[$ pour k allant de 1 à l. La réunion des I_k contient évidemment E et la somme des longueurs des intervalles est inférieure à $l.2\epsilon/3 = 2\epsilon/3 < \epsilon$.

L'ensemble $\mathbb{N}$ est négligeable. On ne peut plus prendre des intervalles de longueurs constantes. La somme des longueurs serait infinie. Il faut donc faire varier la longueur des intervalles. Pour cela on utilise une série à termes positifs convergente. N'importe quelle telle série permet de faire le raisonnement qui suit. La série géométrique de raison 1/2 de premier terme 1/2 (celle qui apparaît dans le paradoxe de Zénon) est un choix agréable. Posons $I_0 =]-\epsilon/4, \epsilon/4[$, $I_1 =]1 - \epsilon/8, 1 + \epsilon/8[$, $I_2 =]2 - \epsilon/16, 2 + \epsilon/16[$,

[3] http://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_de_Russell

[4] http://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_du_barbier

$I_3 =]3-\epsilon/32, 3+\epsilon/32[$,... $I_k =]k-\epsilon/2^{k+2}, k+\epsilon/2^{k+2}[$. Alors on a bien

$$\mathbb{N} \subset \cup_{k\in\mathbb{N}} I_k$$

et

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} longueur(I_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} 2.\epsilon/2^{k+2} = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon/2^{k+1} = \epsilon \sum_{k=0}^{\infty} 1/2^{k+1} = \epsilon.$$

Le raisonnement fait ci-dessus ne dépend pas de l'emplacement des points de $\mathbb{N}$. Le même raisonnement marche pour n'importe quelle partie dénombrable de $\mathbb{R}$. Par exemple l'ensemble des nombres rationnels et l'ensemble des nombres décimaux sont négligeables dans $\mathbb{R}$. Cela peut surprendre car ce sont des ensembles denses.

Une construction de $\mathbb{R}$: les coupures de Dedekind

Définition 0.9. *Une coupure de Dedekind*[5] *est une partie x de $\mathbb{Q}$ ayant les propriétés suivantes :*
(a) $x \neq \emptyset$ et $x \neq \mathbb{Q}$
(b) Si $r \in x$ et $r' \in \mathbb{Q}$ avec $r' < r$ alors $r' \in x$
(c) x n'a pas de plus grand élément.

$\mathbb{R}$ est l'ensemble de toutes les coupures de Dedekind.

Remarque C'est pourquoi nous désignons les coupures par des lettres latines minuscules x, y, etc.

L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ s'injecte dans l'ensemble $\mathbb{R}$ au moyen de l'application

$$\mathbb{Q} \to \mathbb{R}, r \mapsto \{r' \in \mathbb{Q} \mid r' < r\}.$$

(Nous désignons par la lettre r la coupure associée à r de cette façon.) Nous devons maintenant définir les opérations d'addition et de multiplication, la relation d'ordre de telle sorte que les axiomes caractérisant $\mathbb{R}$ soient satisfaits.

La relation d'ordre : $x \leq y$ (en tant que nombres réels) :

$$x \subset y$$

(en tant que partie de $\mathbb{Q}$).

L'addition :

$$x + y = \{r + s \mid r \in x, s \in y\}.$$

L'opposé $-x$ de x est donné par

$$-x = \{s \in \mathbb{Q} \mid r + s < 0 \text{ pour un majorant } r \text{ de } x\}.$$

[5] http://fr.wikipedia.org/wiki/Dedekind

La multiplication : Si $x > 0$, $y > 0$, alors on pose

$$xy = \{t \in \mathbb{Q} \mid \exists r \in x \cap \mathbb{Q}_+,\ s \in y \cap \mathbb{Q}_+ : t \leq rs\},$$

où $\mathbb{Q}_+$ désigne l'ensemble des nombres rationnels positifs. Dans les autres cas on définit le produit par $x0 = 0x = 0$,
$xy = -(x(-y))$, si $x > 0, y < 0$,
$xy = -((-x)y)$, si $x < 0, y > 0$,
$xy = (-x)(-y)$ si $x < 0, y < 0$.

Nous n'allons pas vérifier que tous les axiomes sont satisfaits mais seulement que la propriété de la borne supérieure est satisfaite.

Soit $S \subset \mathbb{R}$ une partie non vide majorée. En particulier il existe $r_0 \in \mathbb{Q}$, majorant tout élément $x \in S$ (vu comme partie de $\mathbb{Q}$). Posons $M = \cup_{x \in S} x$. Nous affirmons que $M = \sup S$.
Démonstration On a bien sûr $x \subset M$ pour tout $x \in S$. D'autre part si pour $y \subset \mathbb{Q}$ on a $x \subset y$ pour tout $x \in S$, alors $M \subset y$. Autrement dit, si M est une coupure, c'est le plus petit des majorants de S. Il suffit donc de montrer que S est une coupure.

Comme $S \neq \emptyset$, M n'est pas vide et l'existence de r_0 montre que $M \neq \mathbb{Q}$. La propriété (b) de la définition est évidemment satisfaite. Enfin pour tout $r \in M$ il existe $x \in S$ avec $r \in x$, donc aussi $r' \in x$ avec $r < r'$ (x est une coupure) et $r' \in M$. Il s'ensuit que la propriété (c) est vérifiée. $\square$