

COURS 5 : La droite réelle (suite)

Proposition 0.1. Soit $(u_n)_n$ une suite bornée. On a :

$$\liminf u_n \leq \limsup u_n$$

Proposition 0.2. Soit $(u_n)_n$ une suite bornée. Les nombres $\liminf u_n$ et $\limsup u_n$ sont respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$.

Démonstration Montrons par exemple que $\liminf u_n$ est la plus petite valeur d'adhérence de $(u_n)_n$. Le fait que $\limsup u_n$ est la plus grande se montre de façon analogue (et a été traité en cours).

Nous avons deux choses à montrer : $\liminf u_n$ est une valeur d'adhérence ; c'est la plus petite.

- $\liminf u_n$ est une valeur d'adhérence.

Il faut montrer

$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists k \geq N \quad |u_k - \liminf u_n| < \epsilon.$$

Soit $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Par définition $\liminf u_n = \lim_p \inf\{u_k \mid k \geq p\}$. Soit $P \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq P$ on ait $|\inf\{u_k \mid k \geq p\} - \liminf u_n| < \epsilon$ c'est-à-dire

$$\liminf u_n - \epsilon < \inf\{u_k \mid k \geq p\} < \liminf u_n + \epsilon.$$

Pour tout $p \geq P$, par définition de la borne inférieure, $\liminf u_n - \epsilon$ est un minorant de $\{u_k \mid k \geq p\}$ et $\liminf u_n + \epsilon$ n'est pas un minorant de $\{u_k \mid k \geq p\}$. Prenons $p \geq \max(N, P)$. Il existe $k \geq p$ tel que

$$\liminf u_n - \epsilon < u_k < \liminf u_n + \epsilon.$$

Autrement dit on a montré l'existence de $k \geq N$ tel qu'on ait $|u_k - \liminf u_n| < \epsilon$.

- $\liminf u_n$ est la plus petite valeur d'adhérence.

Il faut montrer que si $a < \liminf u_n$ alors a n'est pas valeur d'adhérence.

Soit $a < \liminf u_n$.

Par définition a valeur d'adhérence signifie

$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n \geq N \quad |u_n - a| < \epsilon.$$

On veut montrer

$$\exists \epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N \quad |u_n - a| \geq \epsilon. \quad (1)$$

Comme $\liminf u_n = \lim_p \inf\{u_k \mid k \geq p\}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $p \geq N$ on ait $|\inf\{u_k \mid k \geq p\} - \liminf u_n| < \frac{\liminf u_n - a}{2}$. En particulier, pour tout $p \geq N$, on a donc $\inf\{u_k \mid k \geq p\} > \liminf u_n - \frac{\liminf u_n - a}{2} = \frac{\liminf u_n + a}{2}$. La borne inférieure d'un ensemble étant un minorant, le nombre $\frac{\liminf u_n + a}{2}$ est un minorant de l'ensemble $\{u_k \mid k \geq N\}$. Pour tout $k \geq N$ on a donc $u_k > \frac{\liminf u_n + a}{2}$ ou encore $u_k - a > \frac{\liminf u_n - a}{2} > 0$. Autrement dit (1) est vraie (en choisissant $\epsilon = \frac{\liminf u_n - a}{2} > 0$). $\square$

0.1 Densité

Définition 0.3. Soit E une partie de $\mathbb{R}$. On dit que E est dense dans $\mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$ rencontre E (c'est-à-dire contient au moins un élément de E); autrement dit, pour tout x, y dans $\mathbb{R}$ tels que $x < y$, il existe $e \in E$ tel que $x < e < y$.

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Soient $x < y$ deux réels. On a, ou bien $x < 0 < y$, ou bien $0 \leq x < y$, ou bien $x < y \leq 0$.

Si $x < 0 < y$ alors 0 est un rationnel compris entre x et y .

Si $0 \leq x < y$, prenons un entier n tel que $1/n < y - x$ i.e. un entier supérieur à $1/(y - x)$. Soit k le plus grand entier tel que k/n soit inférieur ou égal à x . On a alors, $x < (k + 1)/n = k/n + 1/n \leq x + 1/n < x + (y - x) = y$, i.e. $x < (k + 1)/n < y$.

Si $x < y \leq 0$ alors $0 \leq -y < -x$. On vient de montrer comment trouver un nombre rationnel q tel que $-y < q < -x$. Pour un tel nombre, on a alors $x < -q < y$.

On a donc montré que pour tout $x < y$, on peut trouver un nombre rationnel strictement compris entre x et y . *cqfd*

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Un ensemble E est dense dans $\mathbb{R}$ si, pour tous réels x, y avec $x < y$, il existe un élément e de E tel que $x < e < y$.

Soient x et y deux réels tels que $x < y$.

Si $0 \leq x < y$, prenons k un entier tel que $k > \sqrt{2}/(y - x)$ (un tel k existe car $\mathbb{R}$ est archimédien). Alors, comme $\sqrt{2}/k < y - x$, il existe un entier $n > 0$ tel que $x < n\sqrt{2}/k < y$ et $n\sqrt{2}/k$ n'est pas rationnel.

Si $x < y \leq 0$ alors $0 \leq -y < -x$. D'après le cas précédent, il existe un nombre irrationnel z tel que $-y < z < -x$. Mais alors $-z$ est aussi irrationnel et $x < -z < y$.

Si $x < 0 < y$, prenons k tel que $k > \sqrt{2}/y$. Alors $x < \sqrt{2}/k < y$ et $\sqrt{2}/k$ est irrationnel.

Dans tous les cas, il existe un élément e de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $x < e < y$.