COURS 4 : La droite réelle (suite)

Proposition 0.1. *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de $\mathbb{R}$. On a*

$$\sup(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) = \sup(\{\sup(A_n)\ /\ n \in \mathbb{N}\}).$$

<u>Démonstration</u> L'égalité est vraie même si certains ensembles ne sont pas majorés. On utilise alors la convention d'écriture $\sup = +\infty$.

• Plaçons-nous d'abord dans le cas où la réunion $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ n'est pas majoré (remarquez que ceci est possible même si tous les A_k sont majorés).

On a alors $\sup(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) = +\infty$. Montrons qu'on a aussi $\sup(\{\sup(A_n)\ /\ n \in \mathbb{N}\})$ c'est-à-dire que la partie $\{\sup(A_n)\ /\ n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$ n'est pas majorée. Faisons-le de deux manières.

Première manière : par l'absurde. Supposons que $\{\sup(A_n)\ /\ n \in \mathbb{N}\}$ soit majorée. Prenons M un majorant. Alors, par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\sup(A_n) \leq M$. Mais, pour tout n, $\sup(A_n)$ est un majorant de A_n. Donc, pour tout n, pour tout $x \in A_n$, on a $x \leq M$. Soit maintenant x un élément de $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. Par définition de la réunion, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_n$. On a donc $x \leq M$. Autrement dit tous les éléments de $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ sont inférieurs ou égaux à M. Cela signifie que M majore $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. Or on s'est placé dans le cas où cet ensemble n'est majoré. Contradiction.

Deuxième manière : utilisation de suites. Comme $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ n'est pas majorée, il existe une suite d'éléments de cette ensemble tendant vers $+\infty$[1] . Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une telle suite. Pour tout n, il existe un $k_n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in A_{k_n}$. On a alors $u_n \leq \sup(A_{k_n})$. Comme (u_n) tend vers l'infini, il en est de même de la suite $(\sup(A_{k_n}))_{n\geq 0}$. Ceci montre que l'ensemble $\{\sup(A_n)\ /\ n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas majoré.

• Plaçons-nous dans le cas où la réunion $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ est majoré et où aucun des ensembles A_n n'est vide[2] Nous procédons en deux étapes.

Première étape : $\sup(\{\sup(A_n)\ /\ n \in \mathbb{N}\})$ est un majorant de $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$.

Soit x un élément de $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_n$. Prenons un tel n. Comme $\sup(A_n)$ est un majorant de A_n on a $x \leq \sup(A_n)$. Mais $\sup(A_n) \leq \sup\{\sup(A_k)\ /\ k \in \mathbb{N}\}$ donc $x \leq \sup\{\sup(A_k)\ /\ k \in \mathbb{N}\}$. Tout élément de $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ est donc inférieur à

[1]Exercice : montrer qu'une partie B de $\mathbb{R}$ n'est pas majorée si et seulement s'il existe une suite d'éléments de B tendant vers $+\infty$; énoncer et démontrer une propriété analogue pour caractériser les parties qui ne sont pas minorées.

[2]Que se passe-t-il lorsque certains des A_n ou tous les A_n sont vides ?

$\sup\{\sup(A_k)\ /\ k \in \mathbb{N}\}$.
Deuxième étape : $\sup(\{\sup(A_n)\ /\ n \in \mathbb{N}\})$ est le plus petit des majorants de $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$.
On veut montrer que si M est inférieur strictement à $\sup(\{\sup(A_n)\ /\ n \in \mathbb{N}\})$ alors M n'est pas un majorant de $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$.
Soit $M < \sup(\{\sup(A_n)\ /\ n \in \mathbb{N}\})$. Alors par définition de la borne supérieure, M n'est pas un majorant de l'ensemble $\{\sup(A_n)\ /\ n \in \mathbb{N}\}$. Cela signifie qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $M < \sup(A_n)$. Mais alors, encore une fois par définition de la borne supérieure, cela signifie qu'il existe $x \in A_n$ tel que $M < x$. Un tel élément x appartient évidemment à $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. On a donc obtenu l'existence d'un élément x de $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ tel que $M < x$. Cela signifie que M n'est pas un majorant de $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. $\square$

1 Bornes de fonctions

Définition 1.1. *Soit f une application d'un ensemble X à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f est majorée (resp. minorée) si la partie de $\mathbb{R}$*

$$Im(f) = f(X) = \{f(x)\ /\ x \in X\}$$

est majorée (resp. minorée). Lorsque f est majorée on note $\sup_X f$ ou $\sup_{x\in X} f(x)$ la borne supérieure de $Im(f)$ et on appelle borne supérieure de f ce nombre. Lorsque f est minorée on note $\inf_X f$ ou $\inf_{x\in X} f(x)$ la borne inférieure de $Im(f)$ et on appelle borne inférieure de f ce nombre.

Savoir démontrer les propriétés suivantes à partir des définitions.

$$\inf(-f) = -\sup(f) \qquad \sup(-f) = -\inf(f)$$

$$c > 0, \quad \sup(cf) = c\sup(f) \quad \inf(cf) = c\inf(f)$$

$$\text{si } \forall x \in X \quad f(x) \leq g(x) \text{ alors } \sup(f) \leq \sup(g) \quad \inf(f) \leq \inf(g)$$

$$\text{si } \forall x \in X \quad f(x) \geq g(x) \text{ alors } \sup(f) \geq \sup(g) \quad \inf(f) \geq \inf(g)$$

$$\text{si } \forall x \in X \quad f(x) > g(x) \text{ alors } \sup(f) \geq \sup(g) \quad \inf(f) \geq \inf(g)$$

$$b \in \mathbb{R} \quad \sup(b+f) = b + \sup(f) \quad \inf(b+f) = b + \inf(f)$$

$$\sup f + \inf g \leq \sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$$

2 Les suites

2.1 Définition, exemples, limites

Pour plus de détails : cours AN2[3], Godement Analyse mathématique I, pages 69-77.

Exercice n° 13 (enseignement obligatoire)

Partie A Démonstration de cours.

Soit (u_n) une suite croissante non majorée.

1. Soit M un nombre réel et n_0 un entier naturel tel que $u_{n_0} \geqslant M$.
   Démontrer que pour tout entier naturel n, si $n \geqslant n_0$ alors $u_n \geqslant M$.
2. Quelle conséquence peut-on en tirer pour la suite (u_n) ?
3. Énoncer le théorème du cours ainsi démontré.

Partie B

Répondre par Vrai ou Faux aux propositions suivantes :

a. Si une suite n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$.
b. Si une suite est croissante alors elle tend vers $+\infty$.
c. Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle n'est pas majorée.
d. Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle est croissante.

Définition 2.1. *Un nombre l est limite d'une suite (u_n) si :*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geq N \ |u_n - l| < \epsilon.$$

Une suite convergente est bornée. La réciproque est fausse. Exemple : $(u_n)_n = (-1)^n$, $(u_n)_n = \cos(n)$.

Proposition 2.2. *Soient $(u_n)_n$ une suite convergente, l sa limite et a un nombre $> l$. Il existe un rang N tel que pour tout $n > N$ on ait $u_n < a$.*

Proposition 2.3. *Soient $(u_n)_n$ une suite convergente, l sa limite et a un nombre $< l$. Il existe un rang N tel que pour tout $n > N$ on ait $u_n > a$.*

2.2 Valeurs d'adhérence

Définition 2.4. *Un nombre a est valeur d'adhérence d'une suite (u_n) si :*

$$\forall \epsilon > 0 \ \forall N \ \exists n \geq N \ |u_n - a| < \epsilon.$$

[3]Notes de cours en ligne : http://perso.univ-rennes1.fr/christophe.cheverry/christophe.cheverry/CoursB02S2.pdf

Comparer cette définition à celle de limite.

Exemples : $(-1)^n$, $\sin n$, i^n, la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + n^{-2}$ si n est un carré et $u_n = 1/n$ si n n'est pas un carré.

2.3 Limites supérieure et inférieure d'une suite bornée

Soit $(u_n)_n$ une suite bornée à valeurs réelles. Soit M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$-M \leq u_n \leq M.$$

Considérons l'ensemble $\{u_k \mid k \geq p\}$. C'est un sous-ensemble de $\{u_k \mid k \geq 0\}$ donc un ensemble borné. Il admet donc une borne supérieure et une borne inférieure. Posons

$$v_p = \sup\{u_k \mid k \geq p\} \qquad w_p = \inf\{u_k \mid k \geq p\}.$$

Comme $\{u_k \mid k \geq p\} \subset \{u_k \mid k \geq p+1\}$ on a

$$v_{p+1} \leq v_p \qquad w_{p+1} \geq w_p.$$

Par ailleurs M est un majorant de $\{u_k \mid k \geq p\}$ pour tout p et $-M$ un minorant de $\{u_k \mid k \geq p\}$ pour tout p. On a donc, pour tout p,

$$-M \leq w_p \leq v_p \leq M.$$

La suite $(v_p)_p$ (resp. $(w_p)_p$) est donc décroissante minorée (resp. croissante majorée). On en déduit que les deux suites $(v_p)_p$ et $(w_p)_p$ sont convergentes. On appelle limite supérieure et limite inférieure leurs limites.

Définition 2.5. *Soit $(u_n)_n$ une suite bornée. On appelle limite inférieure, notée* $\liminf u_n$ *ou* $\underline{\lim}\ u_n$*, et limite supérieure de $(u_n)_n$,* $\limsup u_n$ *ou* $\overline{\lim}\ u_n$ *les quantité finies*

$$\underline{\lim}\ u_n = \liminf u_n = \lim_p \inf\{u_k \mid k \geq p\} \qquad \overline{\lim}\ u_n = \limsup u_n = \lim_p \sup\{u_k \mid k \geq p\}.$$

Proposition 2.6. *Soit $(u_n)_n$ une suite bornée. Les nombres* $\liminf u_n$ *et* $\limsup u_n$ *sont respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$.*