COURS 3 : La droite réelle (suite)

Théorème 0.1. *Soit A une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$. L'ensemble des minorants de A a un plus grand élément appelé borne inférieure de A, notée* $\inf(A)$*.*

Si une partie A de $\mathbb{R}$ a un plus grand élément, cet élément est aussi sa borne supérieure. On la note alors $\max(A)$. Si une partie A de $\mathbb{R}$ a un plus petit élément, cet élément est aussi sa borne inférieure. On la note alors $\min(A)$.

Caractérisation de la borne supérieure. Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$. Un nombre M est la borne supérieure de A si :
• M un majorant et, pour tout $\epsilon > 0$, $M - \epsilon$ n'est pas un majorant de A,
ou bien
• M un majorant et il existe une suite d'éléments de A convergeant vers M.

Remarque : la suite en question peut être constante. Penser à l'ensemble $\mathbb{R}_- \cup \{1\}$ par exemple.

Exercice n° 34* (enseignement obligatoire)

Si a et b sont deux entiers strictement positifs, on désigne par $m(a,b)$ le plus petit des deux nombres $\sqrt[a]{b}$ et $\sqrt[b]{a}$ et on considère l'ensemble $A = \{m(a,b) \mid (a,b) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*\}$.
Montrer que A est une partie de $\mathbf{R}$ admettant un plus grand élément que l'on déterminera.

L'ensemble vide est majoré par tous les nombres réels. Il est également minoré par tous les nombres réels. Pour le comprendre il est peut-être plus facile de passer par la négation du fait d'être majoré par un nombre. Par exemple que signifierait que -12 ne soit pas un majorant de $\emptyset$? Cela signifierait qu'on peut trouver un nombre réel x dans $\emptyset$ tel que $x > -12$. Mais on ne peut évidemment pas trouver un tel nombre dans $\emptyset$ puisque $\emptyset$ est vide. En conséquence -12 est bien un majorant de $\emptyset$. Mais cela est vrai de tout nombre aussi bien que de -12. Pour cette raison on écrit :

$$\inf(\emptyset) = +\infty \qquad \sup(\emptyset) = -\infty.$$

Par convention si A n'est pas majorée on écrit $\sup(A) = +\infty$, si A n'est pas minorée $\inf(A) = -\infty$. Avec ces conventions on peut énoncer la proposition suivante portant sur le comportement de sup et inf vis à vis des opérations ensemblistes sans faire d'hypothèse sur les parties dont il est question. Mais dans la démonstration il est nécessaire de distinguer les cas où les ensembles sont vides, majorés, minorés ou non.

Proposition 0.2. *Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$. On a :*

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad \sup(A) \leq \sup(B) \quad \inf(B) \leq \inf(A),$$

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B)) \qquad \inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B)),$$

$$\sup(A \cap B) \leq \min(\sup(A), \sup(B)) \qquad \inf(A \cap B) \geq \max(\inf(A), \inf(B)).$$

<u>Démonstration</u> (d'une partie des affirmations dans le cas où A et B sont bornées et ne sont pas vides)

• Supposons que $A \subset B$.
Soit x un élément de A. Alors x est un élément de B. Or B est majoré par $\sup(B)$ donc $x \leq \sup(B)$.
Autrement dit $\sup(B)$ est un majorant de A. Mais $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A donc $\sup(A) \leq \sup(B)$.

• Soit x un élément de $A \cup B$. Alors x appartient à A ou à B. S'il appartient à A alors $x \geq \inf(A) \geq \min(\inf(A), \inf(B))$, s'il appartient à B alors $x \geq \inf(B) \geq \min(\inf(A), \inf(B))$. De toute manière on a donc $x \geq \min(\inf(A), \inf(B))$.
Autrement dit $\min(\inf(A), \inf(B))$ est un minorant de $A \cup B$. Comme $\inf(A \cup B)$ est le plus grand des minorants de $(A \cup B)$ cela entraîne

$$\inf(A \cup B) \geq \min(\inf(A), \inf(B)). \tag{1}$$

Mais $A \subset A \cup B$, donc d'après la première propriété on a $\inf(A \cup B) \leq \inf(A)$. Et $B \subset A \cup B$, donc $\inf(A \cup B) \leq \inf(B)$. Par suite on a

$$\inf(A \cup B) \leq \min(\inf(A), \inf(B)). \tag{2}$$

De (1) et (2) on déduit l'égalité $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$.

• Si $A \cap B$ est vide alors $\sup(A \cap B) = -\infty$ et l'inégalité à démontrer $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup(A), \sup(B))$ est vraie. Si $A \cap B$ n'est pas vide, soit x un élément de $A \cap B$. Alors comme x appartient à A on a $x \leq \sup(A)$ et comme x appartient à B on a $x \leq \sup(B)$. On a donc $x \leq \min(\sup(A), \sup(B))$.
Le nombre $\min(\sup(A), \sup(B))$ est donc un majorant de $A \cap B$. Comme la borne supérieure de $A \cap B$ est le plus petit des majorants on a $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup(A), \sup(B))$.

□

Remarque : on peut trouver A et B tels que $\sup(A \cap B) < \min(\sup(A), \sup(B))$.

Proposition 0.3. *Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de $\mathbb{R}$. On a*

$$\sup\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sup(\{\sup(A_n) \ / \ n \in \mathbb{N}\}).$$