COURS 2 : La droite réelle (suite)

1 Conséquences des axiomes

Les axiomes énoncés plus hauts permettent de raisonner sur les nombres réels. D'autres présentations de la droite réelle sont possibles : dans le livre Mathématiques L1 : cours complet...[1] vous trouverez un autre ensemble d'axiomes. Le dernier axiome est remplacé par « Toute partie non vide majorée a une borne supérieure ». Avec le système d'axiomes que nous avons adopté cette propriété est un théorème qu'il faut démontrer (voir plus bas). Dans le livre Mathématiques : tout en un pour la licence (L1)[2] vous trouverez une construction de l'ensemble des nombres réels fondée uniquement sur le développement décimal (pages 545 et suivantes).

Il faudrait pour être complet montrer qu'il existe un ensemble satisfaisant les axiomes que nous avons choisis. Cela peut être fait de plusieurs manières[3]. Les propriétés des nombres réels se déduisent de ces axiomes. En toute rigueur tout énoncé doit être démontré à partir des axiomes au moyen des règles de raisonnement logiques admises en mathématiques[4]. L'analyse mathématique moderne est bien construite selon ce modèle. On part des axiomes, on définit de nouveaux objets dont on démontre les propriétés. Un théorème peut donc être ramené aux axiomes. En pratique on ne remonte pas en général jusqu'aux axiomes : on déduit le théorème de résultats déjà prouvés ; on rattache le théorème à une

[1] http://catalogue.univ-rennes1.fr/ipac20/ipac.jsp?session=C2840RB340222.965&profile=web&source=~!burennes1&view=&uri=full=3100001~!337652~!5&ri=5&aspect=power&menu=search&ipp=20&spp=20&staffonly=&term=Marco,+Jean-Pierre&index=&uindex=&aspect=power&menu=search&ri=5

[2] http://catalogue.univ-rennes1.fr/ipac20/ipac.jsp?session=C2840RB340222.965&profile=web&source=~!burennes1&view=&uri=full=3100001~!315237~!3&ri=10&aspect=basic_search&menu=search&ipp=20&spp=20&staffonly=&term=ramis&index=.AW&uindex=&aspect=basic_search&menu=search&ri=10

[3] Je donnerai une construction plus tard. Remarque : au sujet des constructions de $\mathbb{R}$, Dieudonné écrit au début de ses Fondements de l'analyse moderne : « Ces démonstrations ont un grand intérêt logique et, historiquement, elles ont grandement contribué à clarifier la notion classique (et quelque peu confuse) du « continu ». Mais elles n'ont pas grand intérêt en analyse et il n'a pas été jugé nécessaire de les imposer aux étudiants. »

[4] C'est ce qu'on appelle la méthode axiomatique dont le modèle le plus célèbre est fourni par les Éléments d'Euclide.

chaîne de résultats qui le relie aux axiomes. Les règles appliquées à toutes les étapes sont les mêmes. Il est normal de ne pas revenir en permanence aux axiomes. Mais il est très bon pour l'apprentissage de remonter le fil des résultats de temps en temps jusqu'aux axiomes.

En principe également seules les définitions et règles formelles de démonstration sont nécessaires aux raisonnements. Est réputé établi un théorème dont la démonstration s'écrit comme un enchaînement formelle de signes logiques. En pratique on utilise beaucoup d'images concrètes pour mener les raisonnements, images dont on affirme qu'il est théoriquement possible de se passer. Quoi qu'il en soit l'image particulière qui a pu servir à trouver une démonstration ne doit pas intervenir dans la démonstration. Penser aux figures de géométrie qui accompagne les raisonnements du collège ; un triangle rectangle dessiné est un triangle rectangle particulier mais le théorème de Pythagore est valable pour tous les triangles rectangles.

Il est difficile de savoir raisonner sur des objets généraux en utilisant des objets particuliers. La contrainte très stricte de formalisation est très importante. Elle peut paraître exagérée ou inutile. Elle a été historiquement et est toujours une source de grands progrès. La pratique quotidienne des mathématiques montre que c'est souvent les images naïves que l'on construit pour la résolution d'un problème qui sont à l'origine de nos erreurs. Penser aussi à l'avantage de disposer de règles très strictes et fiables de calculs ; les calculs nécessaires pour lancer une fusée par exemple sont essentiellement effectués avec des machines que des hommes ont programmées au moyen d'un langage formel (qui, comme on le sait, se résume en fin de compte à une suite de 0 et de 1).

Il est nécessaire de connaître les règles de maniement de la logique mathématique : implication, négation, contraposée, preuve par l'absurde,... Les premières pages du livre de Godement[5] sont largement suffisantes. Vous pourrez trouver aussi des éléments dans un livre plus ancien du même auteur (dont le titre est Cours d'algèbre) et dans beaucoup d'autres livres.

Quelques propriétés déduites des axiomes
Pour tout nombre réel x, on a $0 \times x = 0$.
Si $x \geq 0$ alors $-x \leq 0$.
Si $x \leq y$, alors $-x \geq -y$.
Si $x \leq 0$ et $y \leq 0$ alors $xy \geq 0$.

Définition 1.1. *Soit x un nombre réel. On appelle valeur absolue de x et on note $|x|$ le nombre valant x si x est positif ou nul, $-x$ si x est négatif ou nul.*

[5] http://catalogue.univ-rennes1.fr/ipac20/ipac.jsp?session=H283933021N95.658&profile=web&source=~!burennes1&view=&uri=full=3100001~!183144~!6&ri=3&aspect=basic_search&menu=search&ipp=20&spp=20&staffonly=&term=godement&index=.AW&uindex=&aspect=basic_search&menu=search&ri=3

Proposition 1.2. *On a l'inégalité triangulaire c'est-à-dire, pour tous x, y dans $\mathbb{R}$, l'inégalité*

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Proposition 1.3. *La suite $(1/n)_{n\geq 1}$ tend vers 0.*

<u>Démonstration</u> Il s'agit de démontrer que

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N |1/n - 0| \leq \epsilon.$$

Quand on cherche à démontrer qu'une phrase mathématiques commençant par $\forall \epsilon > 0$ est vraie la démonstration commence très souvent par « Soit $\epsilon > 0$ »[6].

Soit $\epsilon > 0$. Posons $n = E(1/\epsilon) + 1 > 1/\epsilon$[7]. Pour $n \geq N$ on a alors $0 \leq 1/n \leq \epsilon$, en particulier $|1/n - 0| \leq \epsilon$.$\square$

Les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) $x = 0$,
ii) $x \geq 0$ et $\forall \epsilon \geq 0$ $x \leq \epsilon$,
iii) $x \geq 0$ et $\forall \epsilon > 0$ $x < \epsilon$,
iv) $x \geq 0$ et $\forall \epsilon > 0$ $x \leq \epsilon$,
v) $x \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $x \leq 1/n$,
vi) $x \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $x \leq 2^{-n}$,
vii) $x \geq 0$ et il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ $x \leq u_n$.

Le plus facile et le moins intéressant est le ii).

Remarque 1 : Les raisonnements précédents sont triviaux. Ils donnent plusieurs caractérisations du nombre 0. Cela peut sembler inutile. Nous verrons que ça ne l'est pas du tout. Prenons un exemple.

Soit t le nombre 0,99999999999... (avec des 9 à l'infini). Ce nombre est égal à 1. En effet considérons $1 - x$. C'est un nombre positif ou nul. De plus si $t_n = 0,999...99$ avec n 9 on a

$$1 - t \leq 1 - t_n = 1 - 0,99999...999 \leq 0,00000...001 = 10^{-n}.$$

La propriété vii) ci-dessus est donc vérifiée pour $t = 1 - x$. On en déduit $0 = x = 1 - t$ soit $t = 1$.

Remarque 2 : A priori il est évident que si v) ou vi) est vrai alors vii) l'est aussi. Ce que nous avons démontré est que si vii) était vrai alors v) et vi) le sont aussi. Ce n'est pas

[6]Ce n'est pas toujours le cas. Par exemple si on voulait démontrer qu'une phrase de ce type est vraie par l'absurde alors la démonstration commencerait autrement.

[7]Pour justifier l'existence de la partie entière on a besoin du fait que $\mathbb{R}$ est archimédien. En effet, $E(1/\epsilon)$ est défini comme le plus grand entier inférieur ou égal à $1/\epsilon$. Pour que ce nombre existe il ne faut pas que tous les entiers soient inférieurs à $1/\epsilon$. Le fait que $\mathbb{R}$ soit archimédien assure qu'il existe $L \in \mathbb{N}$ tel que $L \times 1 > 1/\epsilon$.

révolutionnaire mais nous mettons en évidence ainsi que deux propriétés dont l'une est évidemment une conséquence de l'autre peuvent être équivalente. Ici cette équivalence est « cachée »par le quantificateur $\forall n$.

Exercice :
Montrer que $\mathbb{Q}_+^*$ n'a pas de plus petit élément.

2 Bornes supérieures, etc

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in A$ on ait $x \leq M$. Un tel nombre M est appelé majorant de A.

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est minorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in A$ on ait $x \geq M$. Un tel nombre M est appelé minorant de A.

On dit qu'une suite à valeurs réelles est majorées si l'ensemble de ses valeurs est majoré, qu'elle est minorée si l'ensemble de ses valeurs est minoré.

On dit qu'une fonction à valeurs réelles est majorées si l'ensemble de ses valeurs est majoré, qu'elle est minorée si l'ensemble de ses valeurs est minoré.

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ a un plus grand élément s'il existe $M \in A$ tel que, pour tout $x \in A$ on ait $x \leq M$. Un tel nombre M s'il existe est unique et appelé plus grand élément de A.

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ a un plus petit élément s'il existe $M \in A$ tel que, pour tout $x \in A$ on ait $x \geq M$. Un tel nombre M s'il existe est unique et appelé plus élément élément de A.

Proposition 2.1. *L'intervalle* $]0,1[$ *est majoré mais n'a pas de plus grand élément.*

Démonstration Par définition l'intervalle $]0,1[$ est l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R} \ / \ 0 < x < 1\}.$$

Le nombre 1 est donc un majorant de $]0,1[$.
Montrons par l'absurde que $]0,1[$ n'a pas de plus grand élément.
Supposons que $]0,1[$ a un plus grand élément. Appelons α ce plus grand élément. Par définition du plus grand élément on a donc $\alpha \in]0,1[$ et, pour tout $x \in]0,1[$, $x \leq \alpha$. Posons $\beta = (1+\alpha)/2$, comme $\alpha < 1$, on a $2\alpha < 1 + \alpha < 2$ donc $\alpha < \beta < 1$. Autrement dit β appartient à $]0,1[$ et $\alpha < \beta$. Contradiction (puisque α était supposé être le plus grand élément de $]0,1[$). $\square$

Théorème 2.2. *Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. L'ensemble des majorants de A a un plus petit élément appelé borne supérieure de A.*

Démonstration C'est une conséquence de l'axiome : une suite croissante majorée est convergente. Nous allons indiquer comment « construire »une suite croissante convergeant vers la borne supérieure dont nous voulons montrer l'existence.

Prenons $x_0 \in A$ et M_0 un majorant de A. Si $\frac{x_0+M_0}{2}$ est un majorant de A posons $x_1 = x_0$ et $M_1 = \frac{x_0+M_0}{2}$. Si $\frac{x_0+M_0}{2}$ n'est pas un majorant de A alors il existe $x_1 \in A$ strictement supérieur à $\frac{x_0+M_0}{2}$ et inférieur à M_0 puisque M_0 est un majorant de A. Posons alors $M_1 = M_0$. Construisons ainsi par récurrence deux suites $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ croissante et $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ décroissante telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on ait :
$x_k \in A$,
M_k est un majorant de A,
$M_k - x_k \leq 2^{-k}(M_0 - x_0)$.

Les deux suites $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes donc convergentes vers une même limite l.

Montrons que l est le plus petit des majorants de A.
Supposons que l ne soit pas un majorant de A. Alors il existe $x \in A$ tel que $l < x$. Mais l est la limite de $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ donc il existe N tel que M_N soit inférieur strictement à x. Mais ceci est en contradiction avec le fait que M_N est un majorant de A.
Le nombre l est donc bien un majorant de A.
Montrons maintenant que c'est le plus petit. Supposons que ce ne soit pas le plus petit. Alors il existe un nombre l' majorant de A plus petit que l ($l' < l$). Mais $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers l donc il existe L tel que $x_L > l'$. Mais ceci est en contradiction avec le fait que l' est un majorant de A. $\square$