COURS 12 : Fonctions continues (suite)

Théorème 0.1. *Si f est une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ alors f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes sur $[a, b]$.*

Démonstration

Pour montrer que f est bornée, il suffit de montrer que la fonction (composée) $|f|$ est majorée. Comme la fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, si f est continue sur $[a, b]$ alors $|f|$ aussi. Supposons que $|f|$ ne soit pas majorée. Alors il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $[a, b]$ tels que $|f(x_n)|$ tend vers $+\infty$. Comme la suite $(x_n)_n$ est bornée, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ convergeant vers un élément c de $[a, b]$. Comme $|f|$ est continue sur $[a, b]$ donc en c, on a $\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = |f(c)|$. Finalement, on a

$$\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = |f(c)| \quad \text{et} \quad \lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = +\infty.$$

Contradiction. La fonction est donc bornée et les nombres

$$\sup\{f(x) \ / \ x \in [a, b]\} \quad \text{et} \quad \inf\{f(x) \ / \ x \in [a, b]\}$$

sont bien définis. Montrons que f atteint ses bornes c'est à dire qu'il existe α et β dans $[a, b]$ tels que

$$f(\alpha) = \sup\{f(x) \ / \ x \in [a, b]\} \quad \text{et} \quad f(\beta) = \inf\{f(x) \ / \ x \in [a, b]\}.$$

Par définition de la borne inférieure il existe une suite de nombres de la forme $f(x_n)$ (avec x_n dans $[a, b]$ pour tout n) convergeant vers $\sup\{f(x) \ / \ x \in [a, b]\}$. Considérons une sous suite $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ convergeant vers un élément α de $[a, b]$. Alors on a d'une part,

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\alpha))$$

car f est continue en α. D'autre part

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \sup\{f(x) \ / \ x \in [a, b]\}$$

par définition, autrement dit $f(\alpha) = \sup\{f(x) \ / \ x \in [a, b]\}$. Le cas de la borne inférieure se traite de la même manière. $\square$

Corollaire 0.2. *L'image d'un segment par une application continue est un segment.*

En général $f([a,b])$ ne coïncide pas avec $[f(a), f(b)]$.

Théorème 0.3. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, continue sur I, strictement monotone sur I. La fonction f est alors une bijection de T sur l'intervalle $f(I)$ et sa bijection réciproque est continue strictement monotone sur $f(I)$ (de même sens de variation que f).*

Démonstration

Faisons la preuve dans le cas où f est strictement décroissante.

Par définition f définit une surjection de I sur $f(I)$. Si x et y sont différents, on a $x < y$ ou $y < x$. Dans le premier cas $f(x) < (fy)$ dans le deuxième $f(y) < f(x)$. Autrement dit $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$, *i.e.* f est injective sur I. Notons g la bijection réciproque de f.

Donnons-nous deux nombres x et y dans $f(I)$ tels que $x < y$. Supposons qu'on ait $g(x) \leq g(y)$. Alors $g(x)$ et $g(y)$ sont deux nombres distincts de I tels que $x = f(g(x)) \geq f(g(y)) = y$ (car f est décroissante), ce qui est en contradiction avec $x < y$. On a donc $g(x) > g(y)$, autrement dit g est strictement croissante.

Considérons deux points a et b dans $f(I)$ et c un élément de $[a,b]$. Par définition il existe x et y dans I tels que $a = f(x)$ et $b = f(y)$. Comme I est un intervalle $[x,y]$ est inclus dans I. Comme f est continue sur I, elle est continue sur $[x,y]$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure alors l'existence d'un point z de $[x,y]$ tel que $c = f(z)$. Autrement dit c appartient à $f(I)$. On a donc montré que l'image de I est un intervalle.

Reste à montrer que g est continue. Soit x un point de $f(I)$ et (x_n) une suite de points de $f(I)$ convergeant vers x. Supposons que $(g(x_n))_n$ ne converge pas vers $g(x)$. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout N il existe $n > N$ tel que $|g(x_n) - g(x)| > \epsilon$.

On peut donc construire une suite $(x_{n_k})_k$ convergeant vers x tel que pour tout k on ait $|g(x_{n_k}) - g(x)| > \epsilon$; ou encore[1] une suite $(x_{n_k})_k$ convergeant vers x tel que pour tout k on ait $g(x_{n_k}) - g(x) > \epsilon$ ou bien une suite $(x_{n_k})_k$ convergeant vers x tel que pour tout k on ait $g(x) - g(x_{n_k}) > \epsilon$.

Dans le premier cas on a $x_{n_k} = f(g(x_{n_k})) < f(g(x) + \epsilon)$ (comme f est décroissante). Mais $g(x) + \epsilon > g(x)$ donc $f(g(x) + \epsilon) < f(g(x)) = x$ donc $x_{n_k} < f(g(x) + \epsilon) < x$ et $(x_{n_k})_k$ ne converge pas vers x. Contradiction.

Dans le second cas on obtient $x_{n_k} > f(g(x) - \epsilon) > x$ et aussi une contradiction. $\square$

[1] Attention j'affirme l'existence de telles suites. Je ne dis pas ici qu'une suite convergeant vers x converge vers x par valeurs supérieures ou inférieures. Pour passer de la première suite $(x_{n_k})_k$ à l'une des deux autres, il faut éventuellement extraire une nouvelle fois une suite.