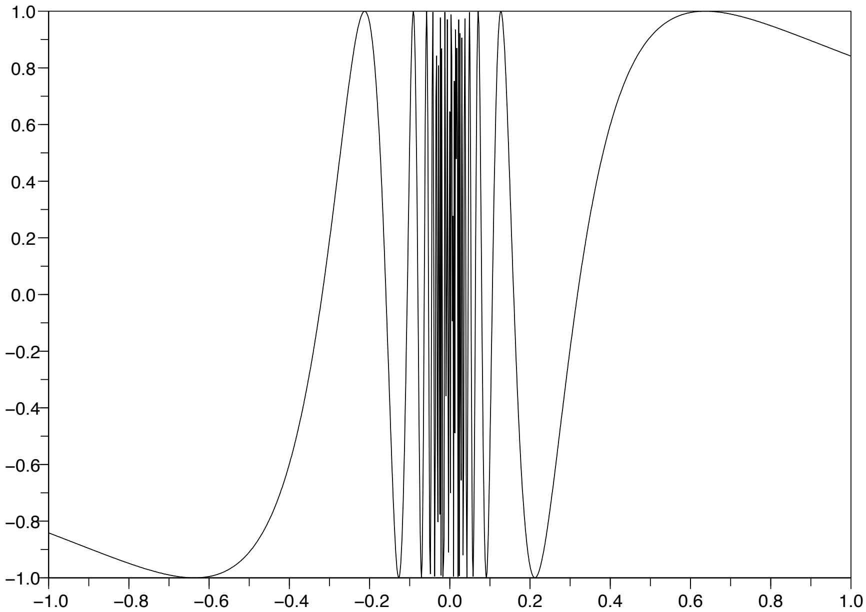
# COURS 10 : Limites de fonctions (suite)

### 0.1 Limites finies en un point

### 0.2 Limites à droite et à gauche en un point de $\mathbb{R}$

Exemple de fonction bornée n'ayant de limite ni à gauche ni à droite en un point.




### 0.3 Limites et composition

## 1 Fonctions monotones

**Définition 1.1.** *Soit $f$ une fonction définie sur un sous-ensemble $x$ de $\mathbb{R}$. On dit que $f$ est croissante sur $X$ si pour tous nombres $x, y$ dans $X$ tels que $x < y$, on a $f(x) \leq f(y)$.*

Remarque : Dire « pour tous nombres $x, y$ dans $X$ tels que $x \leq y$, on a $f(x) \leq f(y)$ »revient au même. En effet si $x = y$ alors $f(x) = f(y)$ (donc en particulier $f(x) \leq f(y)$).

**Définition 1.2.** *Soit $f$ une fonction définie sur un sous-ensemble $X$ de $\mathbb{R}$. On dit que $f$ est strictement croissante sur $X$ si pour tous nombres $x, y$ dans $X$ tels que $x < y$, on a $f(x) < f(y)$.*

Remarque : Cette fois, changer $x < y$ en $x \leq y$ donne une propriété qui n'est jamais satisfaite.

**Définition 1.3.** *Soit $f$ une fonction définie sur un sous-ensemble $x$ de $\mathbb{R}$. On dit que $f$ est décroissante (resp. strictement décroissante) sur $X$ si pour tous nombres $x, y$ dans $X$ tels que $x < y$, on a $f(x) \geq f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$).*

Une fonction $f$ strictement décroissante sur un ensemble est décroissante sur cet ensemble.

**Définition 1.4.** *Une fonction $f$ définie sur un sous-ensemble $X$ de $\mathbb{R}$ est dite monotone sur $X$ si elle est croissante ou décroissante sur $X$.*

Exemple : La fonction $x \mapsto 1/x$ n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}_*$. Elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Proposition 1.5.** *Soit $f$ une fonction monotone sur un intervalle $I$. En tout point intérieur à $I$, $f$ a une limite à droite et une limite à gauche. Si $I$ a un plus petit élément $f$ a une limite à droite en ce point, si $I$ a un plus grand élément $f$ a une limite à gauche en ce point.*

**Proposition 1.6.** *Soit $f$ une fonction croissante sur un intervalle $[a, +\infty[$. Alors soit $f$ a une limite en $+\infty$ (égale à $\sup_{[a,+\infty[} f$) soit $f$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ (et en particulier $f$ n'est pas majorée).*