COURS 1 : La droite réelle

Le continu mathématique et le continu physique.

Hermann Weyl[1] :« Une chose est certaine : le continu intuitif et le continu mathématique ne se recouvrent pas ; entre eux est installé un gouffre profond...La reconstruction mathématique du continu à partir d'unités indivisibles sélectionne dans la bouillie fluente du continu en quelque sorte un tas de points individuels. Le continu est émietté en éléments isolés.(...) Je parle pour cette raison de conception atomiste du continu. »

Henri Poincaré[2] : « Si l'on veut savoir ce que les mathématiciens entendent par un continu, ce n'est pas à la géométrie qu'il faut le demander. Le géomètre cherche toujours plus ou moins à se représenter les figures qu'il étudie, mais ses représentations ne sont pour lui que des instruments ; il fait de la géométrie avec de l'étendue comme il en fait avec de la craie ; aussi doit on prendre garde d'attacher trop d'importance à des accidents qui n'en ont souvent pas plus que la blancheur de la craie.

L'analyste pur n'a pas à craindre cet écueil. Il a dégagé la science mathématiques de tous les éléments étrangers, et il peut répondre à notre question. Qu'est-ce au juste que ce continu sur lequel les mathématiciens raisonnent ? Beaucoup d'entre eux, qui savent réfléchir sur leur art, l'ont fait déjà ; M. Tannery, par exemple, dans son *Introduction à la théorie des Fonctions d'une variable.*

Partons de l'échelle des nombres entiers ; entre deux échelons consécutifs, intercalons un ou plusieurs échelons intermédiaires, puis entre ces échelons nouveaux d'autres encore, et ainsi de suite indéfiniment. Nous aurons ainsi un nombre illimité de termes, ce seront les nombres que l'on appelle fractionnaires, rationnels ou commensurables. Mais ce n'est pas assez encore ; entre ces termes qui sont pourtant déjà en nombre infini, il faut encore en intercaler d'autres, que l'on appelle irrationnels ou incommensurables.

Avant d'aller plus loin, faisons une première remarque. Le continu ainsi conçu n'est plus qu'une collection d'individus rangés dans un certain ordre, en nombre infini, il est vrai, mais it extérieurs les uns aux autres. Ce n'est pas là la conception ordinaire, où l'on suppose entre les éléments du continu une sorte de lien intime qui en fait un tout, où le point ne préexiste pas à la ligne, mais la ligne au point. De la célèbre formule, le continu est

[1] http://fr.wikipedia.org/wiki/Hermann_Weyl
[2] http://fr.wikipedia.org/wiki/Henri_poincare

l'unité dans la multiplicité, la multiplicité seule subsiste, l'unité a disparu. Les analystes n'en ont pas moins raison de définir leur continu comme ils le font, puisque c'est toujours sur celui-là qu'ils raisonnent depuis qu'ils se piquent de rigueur. Mais c'est assez pour nous avertir que le véritable continu mathématique est tout autre chose que celui des physiciens et celui des métaphysiciens. »

Les nombres : leur histoire, leur place et leur rôle de l'Antiquité aux recherches actuelles, Ebbinghaus... Vuibert[3]. Pages 19 et suivantes pour les nombres réels.

1 $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel

Les nombres grecs. Une démonstration par l'absurde.

La racine carrée de 2 n'est pas rationnelle.
Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnelle. Alors il existe p et q deux nombres entiers premiers entre eux tels que $\sqrt{2} = p/q$. On a alors $2q^2 = p^2$. On en déduit que 2 divise p i.e. qu'on peut écrire $2p'$. On a alors $2q^2 = 2^3 p'^2$ soit $q^2 = 2p'^2$. Le nombre q est donc pair lui aussi. Contradiction car on avait supposé que p et q étaient premiers entre eux.

La racine cubique de 2 n'est pas rationnelle.
Supposons que $2^{1/3}$ soit rationnelle. Alors il existe p et q deux nombres entiers premiers entre eux tels que $2^{1/3} = p/q$. On a alors $2q^3 = p^3$. On en déduit que 2 divise p i.e. qu'on peut écrire $2p'$. On a alors $2q^3 = 2^3 p'^3$ soit $q^3 = 4p'^2$. Le nombre q est donc pair lui aussi. Contradiction car on avait supposé que p et q étaient premiers entre eux.

Peut-on se contenter des rationnels ? Ne serait-ce pas embêtant de devoir supposer que les diagonales d'un carré ne se coupent pas ? Tant qu'on y est pourquoi ne pas se contenter des décimaux avec 25 chiffres après la virgule, prétextant qu'une précision supplémentaire n'a aucun sens ? Par exemple on écrirait 1/3=0,33333 33333 33333 33333 33333 ou encore π=3,14159 26535 89793 23846 26433. Y gagnerait-on quelque chose ?

2 Écritures décimales des nombres réels

2,7 milliards de décimales de π sont connues aujourd'hui. Montrons que tous les nombres réels ont un développement décimal. Soit x un élément de $[0, 1[$. On peut écrire

$$10x = E(10x) + \{10x\}$$

[3] http://catalogue.univ-rennes1.fr/ipac20/ipac.jsp?session=12724435E81B3.5661&profile=web&source=~!burennes1&view=&uri=full=3100001~!136265~!16&ri=3&aspect=basic_search&menu=search&ipp=20&spp=20&staffonly=&term=Les+nombres+&index=.TL&uindex=&aspect=basic_search&menu=search&ri=3

où E désigne la partie entière et $\{\ \}$ la partie fractionnaire. Posons $a_1 = E(10x) \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ et $x_1 = \{10x\} \in [0,1[$. Recommençons avec x_1 à la place de x :

$$10x_1 = E(10x_1) + \{10x_1\} = a_2 + x_2$$

avec $a_2 = E(10x_1) \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ et $x_2 = \{10x_1\} \in [0,1[$. On définit ainsi par récurrence une deux suites en posant pour tout k, $a_{k+1} = E(10x_k) \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ et $x_{k+1} = \{10x_k\} \in [0,1[$.

Pour tout k on a

$$x_k = \frac{a_{k+1}}{10} + \frac{x_{k+1}}{10}.$$

On en déduit

$$x = \frac{a_1}{10} + \frac{x_1}{10} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{x_2}{10^2}$$

puis par récurrence

$$x = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_k}{10^k} + \frac{x_k}{10^k} = \sum_{j=0}^{k} \frac{a_j}{10^j} + \frac{x_k}{10^k}.$$

Comme $x_k \in [0,1[$ on en déduit que $0 \leq x - \sum_{j=0}^{k} \frac{a_j}{10^j} \leq \frac{1}{10^k}$. D'où, en faisant tendre k vers l'infini

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{10^j}.$$

Quels sont les nombres dont le développement décimal est périodique à partir d'un certain rang ? Réponse : ce sont exactement les nombres rationnels.

Tous les nombres réels ont donc un développement décimal. Mais chaque nombre pourraient en avoir plusieurs, dont certains avec des propriétés particulières, ou certaines suites pourraient n'être le développement d'aucun nombre. Ce n'est pas le cas.

D'une part, si $(a_k)_k$ est une suite quelconque de nombres dans $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ la série à termes positifs $\sum_{k\geq 1} a_k/10^k$ est convergente (car la suite $(\sum_{k=1}^{k} a_k/10^k_n$ est croissante majorée par 1). D'autre part considérons $(a_k)_k$ et $(b_k)_k$ deux développements différents d'un même nombre x. Soit k_0 le premier indice pour lequel $a_k \neq b_k$; on peut supposer $a_{k_0} > b_{k_0}$, donc $a_{k_0} \geq b_{k_0} + 1$. L'égalité $x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{10^j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_j}{10^j}$ entraîne

$$\sum_{k_0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k_0}^{\infty} \frac{b_k}{10^k}.$$

Mais $\sum_{k_0}^{\infty} \frac{b_k}{10^k} \leq (b_{k_0}+1)/10^{k_0}$ avec égalité si et seulement si tous les b_j pour $j \geq k_0 + 1$ sont égaux à 9. L'égalité ci-dessus n'a lieu que si $a_{k_0} = b_{k_0} + 1$, et pour $j \geq k_0 + 1$, $a_j = 0$, $b_j = 9$. En conclusion, les seuls nombres qui ont deux développements décimaux sont les nombres décimaux. Ils ont deux développements : l'un se termine par des 0 (on l'appelle développement propre), l'autre par des 9.

Remarque sur le stockage de l'information et l'idée d'une précision infinie.

3 Les axiomes

Qu'est-ce qu'une relation d'ordre sur un ensemble ? Exemples. Relation d'ordre totale. Question : combien de relations d'ordre totale sur un ensemble fini ?

Le corps des nombres réels est un ensemble $\mathbb{R}$ pour lequel sont définies :
deux applications $(x, y) \to x + y$ et $(x, y) \to xy$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;
une relation $x \leq y$ (écrite aussi $y \geq x$) entre les éléments de $\mathbb{R}$, satisfaisant aux quatre groupes d'axiomes suivant :

1. $\mathbb{R}$ **est un corps,** en d'autres termes :
$x + (y + z) = (x + y) + z$, l'addition est associative ;
$x + y = y + x$, l'addition est commutative ;
il existe un élément $0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $0 + x = x$;
pour chaque élément $x \in \mathbb{R}$, il existe un élément $-x \in \mathbb{R}$, tel que $x + (-x) = 0$;
$x(yz) = (xy)z$;
$xy = yx$;
il existe un élément $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $1x = x$;
pour chaque élément $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, il existe un élément $x^{-1} \in \mathbb{R}$, tel que $xx^{-1} = 1$;
$x(y + z) = xy + xz$.

2. $\mathbb{R}$ **est un corps ordonné.** Ceci signifie que les axiomes suivants sont satisfaits :
$x \leq y$ et $y \leq z$ impliquent $x \leq z$;
"$x \leq y$ et $y \leq x$" est équivalent à $x = y$;
pour deux éléments quelconques x, y de $\mathbb{R}$, ou bien $x \leq y$ ou bien $y \leq x$;
$x \leq y$ implique $x + z \leq y + z$;
$0 \leq x$ et $0 \leq y$ impliquent $0 \leq xy$.

3. $\mathbb{R}$ **est un corps ordonné archimédien,** ce qui signifie qu'il satisfait à l'axiome d'Archimède : pour tout couple (x, y) de nombres réels, tels que $0 < x$, $0 \leq y$, il existe un entier n tel que $y \leq nx$.

Le quatrième axiome peut prendre différentes formes. Par exemple :

4. $\mathbb{R}$ satisfait à l'axiome des intervalles emboîtés : étant donnée une suite $([a_n, b_n])$ d'intervalles fermés tels que $a_n \leq b_n$, $a_n \leq a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leq b_n$ pour tout n, alors l'intersection de cette suite n'est pas vide.

Dans le cours nous adopterons la forme suivante (qui donne une définition de $\mathbb{R}$ équivalente) :

4. Dans $\mathbb{R}$, toute suite croissante majorée est convergente.