Corrigé de l'examen 2007

Exercice 1. (6 points)

1) A quelle condition sur le nombre réel a la matrice suivante $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Calculer la matrice inverse quand elle existe.

Le déterminant de A vaut $4+a$. La matrice A est donc inversible lorsque $a \neq 0$. La comatrice de A est $\begin{pmatrix} 2 & -a \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. L'inverse de A est donc

$$\begin{pmatrix} 2/(4+a) & 1/(4+a) \\ -a/(4+a) & 2/(4+a) \end{pmatrix}$$

2) Écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 en $(1,1,0)$ de la fonction

$$f(x,y,z) = x^3 + y^2 - (x+z)^{1/3}.$$

On calcule d'abord la valur dr f en $(1,1,0)$:

$$f(1,1,0) = 1+1-1 = 1.$$

Le gradiant de f est

$$\begin{pmatrix} 3x^2 - \frac{1}{3(x+z)^{2/3}} \\ 2y \\ -\frac{1}{3(x+z)^{2/3}}. \end{pmatrix}$$

En $(1,1,0)$ la transposée du gradiant vaut donc $(8/3, 2, -1/3)$. La matrice hessienne est

$$\begin{pmatrix} 6x + 2/9(x+z)^{-5/3} & 0 & 2/9(x+z)^{-5/3} \\ 0 & 2 & 0 \\ 2/9(x+z)^{-5/3} & 0 & 2/9(x+z)^{-5/3} \end{pmatrix}.$$

En $(1,1,0)$, elle vaut

$$\begin{pmatrix} 6+2/9 & 0 & 2/9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2/9 & 0 & 2/9 \end{pmatrix}.$$

Le développement de Taylor de f à l'ordre 2 en $(1,1,0)$ est donc :

$$f(1+x, 1+y, z) = 1 + 8/3x + 2y - 1/3z + 28/9x^2 + y^2 + 1/9z^2 + 2/9xz + \epsilon(x,y,z)(x^2+y^2+z^2).$$

3) Calculer le déterminant de la matrice

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le calcul peut se faire de différentes façons. En voici une. En soustrayant la quatrième ligne à la deuxième, on obtient l'égalité :

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

On développe ensuite par rapport à la deuxième ligne, ce qui donne

$$detE = (-3)\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-3)[0-2+1-0-0-2] = 9.$$

Exercice 2. (5 points)
1) Étudier la nature des points stationnaires de la fonction :

$$f(x, y) = x^3 - 3x + xy^2.$$

Calul des dérivées partielles

$$\partial f/\partial x(x, y) = 3x^2 - 3 + y^2$$
$$\partial f/\partial y(x, y) = 2xy$$

Recherche des points stationnaires
Ce sont les points en lesquels les deux dérivées partielles sont nulles. Pour que la deuxième dérivée soit nulle, il faut et il suffit que x ou y soit nulle. Si $x = 0$ la première dérivée partielle est nulle si $y^2 = 3$ c'est-à-dire $y = \pm\sqrt{3}$. Si $y = 0$ la première dérivée partielle est nulle si $x^2 = 1$ c'est-à-dire $x = \pm 1$. On a donc quatre points stationnaires :

$$(0 \quad \sqrt{3}) \; (0 \quad -\sqrt{3}) \; (1 \quad 0) \; (-1 \quad 0).$$

Calcul de la matrice hessienne

$$\begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

Nature des points stationnaires
En $(1 \quad 0)$ la hessienne vaut

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est positif ainsi que le premier coefficient : $(1 \quad 0)$ est un minimum local.
En $(-1 \quad 0)$ la hessienne vaut

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est positif,le premier coefficient est négatif : $(-1 \quad 0)$ est un maximum local.
En $(0 \quad \sqrt{3})$ la hessienne vaut

$$\begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est négatif : $(0 \quad \sqrt{3})$ est un point selle.
En $(0 \quad -\sqrt{3})$ la hessienne vaut

$$\begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est négatif : $(0 \quad -\sqrt{3})$ est un point selle.

Exercice 3. (4 points)
Une économie est structurée en trois secteurs 1, 2, 3. Chaque secteur utilise des consommations intermédiaires de production des autres pour travailler. Pour produire une unité, le secteur 1 utilise 0 unité de production du secteur 2, 0,1 du secteur 3. Pour produire une unité, le secteur 2 utilise 0,1 unité de production du secteur 1, 0,1 du secteur 3. Pour produire une unité, le secteur 3 utilise 0 unité de production du secteur 1, 0,1 du secteur 2.
1) Donner la matrice de technologie associée à cette économie.
La matrice de technologie est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Si la demande pour les produits du secteur 1 est 1, celle pour le secteur 2 est 2 et celle pour le secteur 3 est 1, quelles doivent-être les productions brutes de chacun des secteurs ? (On pourra prendre

$1/0,99 = 1,01$ et arrondir à deux chiffres après la virgule) Le vecteur des productions brutes est donné par

$$(Id-A)^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -0,1 & 0\\0 & 1 & -0,1\\-0,1 & -0,1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0,1 & 0,01\\0,01 & 1,01 & 0\\0,1 & 0,11 & 1,01\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1,21\\2,13\\1,33\end{pmatrix}.$$

Exercice 4. (5 points)
Soit f une fonction de trois variables x, y, z homogène de degré 3. On suppose que x, y, z dépendent du temps.
1) Exprimer le taux d'accroissement instantané de f en fonction des élasticités partielles de f et des taux de croissances instantanés de x, y, z. Donner la démonstration de l'égalité.
Le taux de croissance instantané est :

$$\begin{aligned} T_F &= 1/F.dF/dt \\ &= 1/F.(\partial F/\partial x.dx/dt + \partial F/\partial y.dy/dt + \partial F/\partial z.dz/dt) \\ &= x/F\partial F/\partial x.1/xdx/dt + y/F\partial F/\partial y.1/ydy/dt + z/F\partial F/\partial z.1/zdz/dt \\ &= E_{F|x}T_x + E_{F|y}T_y + E_{F|z}T_z \end{aligned}$$

2) On se place en un point où les élasticités de f sont toutes égales entre elles. Que vaut le taux d'accroissement de f si $T_x = 1.5\%$, $T_y = 2\%$, $T_z = 1,5\%$? Comme la fonction est homogène de degré 3, le théorème d'Euler fournit l'égalité :

$$E_{F|x} + E_{F|y} + E_{F|z} = 3.$$

En un point où les élasticités sont égales elles sont donc égales à 1. la formule du 1) donne alors :

$$T_F = 0,015 + 0,02 + 0,015 = 0,05.$$

Le taux de croissance instantané de f est donc de 5%.