Corrigé de l'examen 2006

Exercice 1. (6 points)

1) (2 points) Inverser la matrice suivante $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Le déterminant de A vaut 5. La comatrice de A est $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. L'invese de A est donc

$$\begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

2) (3 points) Calculer le déterminant de la matrice

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le calcul peut se faire de différentes façons. En voici une. En soustrayant la quatrième ligne à la deuxième, puis en ajoutant la première à la quartième on obrient les égalités :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

On développe ensuite par rapport à la troisième colonne, ce qui donne

$$detE = (-1) \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)[8 - 8 - 6 - 16] = 22.$$

3) (1 point) La fonction

$$f(x, y) = 4x^{2/3}y + 2x^{5/3}$$

est-elle homogène ? Si oui, de quel degré ?
Soit t un nombre positif. On a

$$f(tx, ty) = 4(tx)^{2/3}ty + 2(tx)^{5/3} = t^{5/3}(4x^{2/3}y + 2x^{5/3}) = t^{5/3}f(x, y).$$

La fonction f est donc homogène de degré 5/3.

Exercice 2. (6 points)
Étudier la nature des points stationnaires de la fonction :

$$f(x, y, z) = \frac{2}{3}y^3 - x^3 - \frac{3}{2}z^2 - 3xz + x + z - 2y - 3.$$

Calul des dérivées partielles (1 point)

$$\partial f/\partial x(x, y, z) = -3x^2 - 3z + 1$$
$$\partial f/\partial y(x, y, z) = 2y^2 - 2$$
$$\partial f/\partial z(x, y, z) = -3z - 3x + 1$$

Recherche des points stationnaires (2 points)
Ce sont les points en lesquels les trois dérivées partielles sont nulles. Pour que la dérivée partielles soit nulle, il faut et il suffit que y soit égal à 1 ou -1. Si la dérivée partielle par rapport à z est nulle alors on a

$-3z+1=3x$. En remplaçant $-3z+1$ par $3x$ dans $0=-3x^2-3z+1$, on obtient $-3x^2+3x=0$. Il faut donc $x=0$ ou $x=1$. Dans le premier cas, on a $z=1/3$, dans le deuxième on a $z=-2/3$. On a donc quatre points stationnaires :

$$(0\ \ 1\ \ 1/3)\ (0\ \ -1\ \ 1/3)\ (1\ \ 1\ \ -2/3)\ (1\ \ -1\ \ -2/3).$$

Calcul de la matrice hessienne (1 point)

$$\begin{pmatrix} -6x & 0 & -3 \\ 0 & 4y & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Nature des points stationnaires (2 points)
On cherche les valeurs propres de la matrice hessienne en chacun des quatre points stationnaires.
En $(0\ \ 1\ \ 1/3)$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)[\lambda(3+\lambda)-9] = (4-\lambda)[\lambda^2+3\lambda-9].$$

Les valeurs propres de la hessienne sont 4, $-3/2+3/2\sqrt{5}$, $-3/2-3/2\sqrt{5}$. Deux sont positives, l'une est négative : c'est un point selle.
En $(0\ \ -1\ \ 1/3)$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -3 \\ 0 & -4-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-4-\lambda)[\lambda(3+\lambda)-9] = (-4-\lambda)[\lambda^2+3\lambda-9].$$

Les valeurs propres de la hessienne sont -4, $-3/2+3/2\sqrt{5}$, $-3/2-3/2\sqrt{5}$. Deux sont négatives, l'une est positive : c'est un point selle.
En $(1\ \ 1\ \ -2/3)$

$$\begin{vmatrix} -6-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)[(6+\lambda)(3+\lambda)-9] = (4-\lambda)[\lambda^2+9\lambda+18-9].$$

Les valeurs propres de la hessienne sont 4, $-9/2+3/2\sqrt{5}$, $-9/2-3/2\sqrt{5}$. Deux sont négatives, l'une est positive : c'est un point selle.
En $(1\ \ -1\ \ -2/3)$

$$\begin{vmatrix} -6-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & -4-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-4-\lambda)[(6+\lambda)(3+\lambda)-9] = (-4-\lambda)[\lambda^2+9\lambda+18-9].$$

Les valeurs propres de la hessienne sont -4, $-9/2+3/2\sqrt{5}$, $-9/2-3/2\sqrt{5}$. Elles sont toutes négatives : $(1\ \ -1\ \ -2/3)$ est un maximum local.

Exercice 3. (4 points)
Une économie est structurée en trois secteurs 1, 2, 3. Chaque secteur utilise des consommations intermédiaires de production des autres pour travailler. Pour produire une unité, le secteur 1 utilise 0 unité de production du secteur 2, 0,1 du secteur 3. Pour produire une unité, le secteur 2 utilise 0,2 unité de production du secteur 1, 0 du secteur 3. Pour produire une unité, le secteur 3 utilise 0,1 unité de production du secteur 1, 0 du secteur 2.
1) Donner la matrice de technologie associée à cette économie.
La matrice de technologie est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Si la demande pour les produits du secteur 1 est 1, celle pour le secteur 2 est 2 et celle pour le secteur 3 est 1, quelles doivent-être les productions brutes de chacun des secteurs ? (On pourra prendre $1/0,99 = 1,01$ et arrondir à deux chiffres après la virgule) Le vecteur des productions brutes est donné par

$$(Id-A)^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-0,2&-0,1\\0&1&0\\-0,1&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,01&0,2&0,1\\0&1&0\\0,1&0,02&1,01\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,51\\2\\1,15\end{pmatrix}.$$

Exercice 4. (4 points)
Soit la fonction de production $q = F(x, y, z) = x^{1/3}y^{1/2}z^{1/4}$.
On suppose que x, y, z dépendent du temps. Calculer le taux de croissance instantané de la production F lorsque les taux de croissance instantanés des facteurs sont $T_x = 1.5\%$, $T_y = 2\%$, $T_z = 1,5\%$.
Le taux de croissance instantané est :

$$\begin{aligned}
T_F &= 1/F.dF/dt\\
&= 1/F.(\partial F/\partial x.dx/dt + \partial F/\partial y.dy/dt + \partial F/\partial z.dz/dt)\\
&= x/F\partial F/\partial x.1/xdx/dt + y/F\partial F/\partial y.1/ydy/dt + z/F\partial F/\partial z.1/zdz/dt\\
&= E_{F|x}T_x + E_{F|y}T_y + E_{F|z}T_z\\
&= 1/3.0,015 + 1/2.0,02 + 1/4.0,015\\
&= 0,01875.
\end{aligned}$$