Quelques corrigés d'exercices de la feuille 3

Exercice 1. Calculer les intégrales généralisées suivantes

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}\,dx \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx \quad \int_0^{+\infty} xe^{-2x}\,dx \quad \int_0^{+\infty} (x^2-3)e^{-x}\,dx$$

— Le premier calcul a été fait en cours.
— La fonction $x \mapsto \frac{1}{x(x+1)}$ est continue sur $[1,+\infty[$. Le seul problème de convergence est en $+\infty$.

$$\begin{aligned}
\int_1^T \frac{1}{x(x+1)}\,dx &= \int_1^T \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x(x+1)}\right)\,dx \\
&= \int_1^T \frac{1}{x} - \int_1^T \frac{1}{x+1}\,dx \\
&= \ln(T) - \ln(1) - \ln(T+1) + \ln(2) \\
&= \ln(\frac{T}{T+1}) + \ln(2)
\end{aligned}$$

Lorsque T tend vers $+\infty$, $\frac{T}{T+1}$ tend vers 1, donc $\ln(\frac{T}{T+1})$ tend vers 0. On a montré que $\int_1^T \frac{1}{x(x+1)}\,dx$ tend vers $\ln(2)$ lorsque T tend vers $+\infty$. Conclusion : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}\,dx$ est convergente et sa valeur est $\ln(2)$.
— La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$. Le seul problème de convergence est en $+\infty$.

$$\begin{aligned}
\int_1^T \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \arctan(T) - \arctan(1) \\
&= \arctan(T) - \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Lorsque T tend vers $+\infty$, $\arctan(T)$ tend vers $\pi/2$. Conclusion : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ est convergente et sa valeur est $\pi/4$.
— La fonction $x \mapsto xe^{-2x}$ est continue sur $[1,+\infty[$. Le seul problème de convergence est en $+\infty$.

$$\begin{aligned}
\int_1^T xe^{-2x}\,dx &= [x\frac{-1}{2}e^{-2x}]_0^T - \int_1^T \frac{-1}{2}e^{-2x}\,dx \\
&= \frac{-1}{2}Te^{-2T} + \frac{1}{2}\int_1^T e^{-2x}\,dx \\
&= \frac{-1}{2}Te^{-2T} + \frac{1}{2}[\frac{-1}{2}e^{-2x}]_0^T \\
&= \frac{-1}{2}Te^{-2T} - \frac{1}{4}e^{-2T} + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Lorsque T tend vers $+\infty$, $\frac{-1}{2}Te^{-2T} - \frac{1}{4}e^{-2T}$ tend vers 0 (croissances comparées des fonctions x et e^{-x} pour le premier terme de la somme). Conclusion : $\int_1^{+\infty} xe^{-2x}\,dx$ est convergente et sa valeur est $1/4$.

Exercice 2. Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{x}e^{-x}\,dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1}\,dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-\sqrt{x}}}{x^2+1}\,dx, \quad \int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{(1-x)^3}}\,dx.$$

— La fonction $x \mapsto \sqrt{x}e^{-x}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Le seul problème de convergence est en $+\infty$. De plus la fonction à intégrer est positive et par croissances comparées on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}e^{-x}}{x^{-2}} = 0.$$

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ converge. Conclusion : l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sqrt{x}e^{-x}\, dx$ converge.

— La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2+1}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Elle tend vers $-\infty$ en 0. Il y a deux problèmes : en 0 et en $+\infty$.

Un théorème que nous n'avons pas pu voir en cours à cause du blocage. Si l'intégrale $\int_I |f(t)|\, dt$ converge alors l'intégrale $\int_I f(t)\, dt$ converge. Dans ce cas on dit que l'intégrale $\int_I f(t)\, dt$ converge absolument. Nous allons l'utiliser pour étudier la convergence en 0 ici.

On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{|\ln(x)|}{x^2+1}}{1/\sqrt{x}} = 0$$

(car $\sqrt{x}\ln(x)$ tend vers 0 en 0^+ (croissances comparées) et $\frac{1}{x^2+1}$ tend vers 1). Or l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ converge (car $1/2 < 1$) donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{|\ln(x)|}{x^2+1}\, dx$ converge, donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2+1}\, dx$ converge (absolument). Étudions maintenant le problème en $+\infty$. Comme $\ln(x)/\sqrt{x}$ tend vers 0 en $+\infty$ (croissances comparées) pour $A > 1$ suffisamment grand on a

$$0 \le \frac{\ln(x)}{x^2+1} \le \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} \le \frac{\sqrt{x}}{x^2} \le \frac{1}{x^{3/2}},$$

or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\, dx$ converge (car $3/2 > 1$) donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1}\, dx$ converge. Conclusion : les intégrales $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2+1}\, dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1}\, dx$ convergent toutes les deux donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1}\, dx$ converge.

— La fonction $x \mapsto \frac{xe^{-\sqrt{x}}}{x^2+1}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Le seul problème de convergence est en $+\infty$. Il existe $A > 0$ tel que pour $x \ge A$ on ait

$$0 \le \frac{xe^{-\sqrt{x}}}{x^2+1} \le \frac{1}{x^2+1}$$

(par croissances comparées $xe^{-\sqrt{x}}$ tend vers 0 en $+\infty$ (justifiez-le !)). Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx$ converge (et sa valeur vaut $\pi/2$ (penser à arctan)). Conclusion : l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-\sqrt{x}}}{x^2+1}\, dx$ converge.

— La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{(1-x)^3}}$ est continue sur $]0, 1[$. Elle tend vers $-\infty$ en 0. Et il faut étudier ce qui se passe en 1 (forme indéterminée 0/0). La fonction à intégrer est négative. Pour obtenir la valeur absolue il suffit de multiplier par -1. En 0 la fonction $-\frac{\ln(x)}{\sqrt{(1-x)^3}}$ est équivalente à $-\ln(x)$. Or l'intégrale $\int_0^{1/2} -\ln(x)\, dx$ est convergente (par exemple car $0 \le -ln(x) \le 1/\sqrt{x}$ près de 0). Donc l'intégrale $\int_0^{1/2} -\frac{\ln(x)}{\sqrt{(1-x)^3}}\, dx$ converge. Faisons un développement limité de $-\ln(x)$ en 1 : $-\ln(x) = -\ln(1) + (1-x) + o(1-x)$. On en déduit que

$$0 \le -\frac{\ln(x)}{\sqrt{(1-x)^3}} \sim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^3}} = \frac{1}{(1-x)^{3/2-1}} = \frac{1}{(1-x)^{1/2}}.$$

Or l'intégrale $\int_{1/2}^1 \frac{1}{(1-x)^{1/2}}\, dx$ converge (car $1/2 < 1$) donc l'intégrale $\int_{1/2}^1 -\frac{\ln(x)}{\sqrt{(1-x)^3}}\, dx$ converge. Conclusion : l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{(1-x)^3}}\, dx$ converge (absolument).