DS2

Exercice 1. (*3 points*)

1. Montrer que l'intégrale
$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt$$
converge pour $x > 0$.
La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$. En $+\infty$ les croissances comparées des fonctions puissances et de l'exponentielle assurent que $t^{x-1}e^{-t} = o(x^{-2})$ ce qui montre que $\int_1^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt$ converge. Lorsque t tend vers 0, $t^{x-1}e^{-t}$ est équivalent à t^{x-1} (positif). Si $x > 0$ alors $x - 1 > -1$ et le critère de Riemann montre que $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\, dt$ converge. En conclusion $\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt$ converge pour tout $x > 0$.
2. Montrer que Γ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et donner une expression de sa dérivée.
Pour tout $x > 0$ la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est mesurable et intégrable (question 1.) sur $]0, +\infty[$.
Pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est dérivable et
$$\frac{\partial}{\partial x}(t^{x-1}e^{-t}) = \ln t\; t^{x-1}e^{-t}.$$
Fixons $0 < a < b$ deux nombres réels. Pour tout $x \in]a, b[$ on a
$$|\ln t\; t^{x-1}e^{-t}| \leq |\ln t|\; t^{a-1}\mathbf{1}_{]0,1]}(t) + |\ln t|\; t^{b-1}e^{-t}\mathbf{1}_{]1,+\infty]}(t).$$
Par les mêmes arguments que dans la question 1. (en 0 : $|\ln t|\; t^{a-1}$ est un $o(t^{a/2-1})$; autre possibilité : reconnaître une intégrale de Bertrand) on montre que la fonction (indépendante de $x \in]a, b)[$)
$$t \mapsto |\ln t|\; t^{a-1}\mathbf{1}_{]0,1](t)} + |\ln t|\; t^{b-1}e^{-t}\mathbf{1}_{]1,+\infty](t)}$$
est intégrable sur $]0, +\infty[$. Le théorème de dérivation sous l'intégrale assure alors que Γ est dérivable sur $]a, b[$ de dérivée
$$\Gamma'(x) = \int_0^{\infty} \ln t\; t^{x-1}e^{-t}dt.$$
Cela étant vrai pour tout a, b, Γ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée est donnée par la formule précédente.
3. Montrer que pour tout $t > 0$ on a
$$\Gamma(t + 1) = t\Gamma(t).$$
$$\Gamma(t + 1) = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A s^t e^{-s}\, ds.$$
Calculons $\int_0^A s^t e^{-s}\, ds$ par parties ($u' = e^{-s}$, $v = s^t$, $u = -e^{-s}$, $v' = ts^{t-1}$) :
$$\int_0^A s^t e^{-s}\, ds = [-e^{-s}s^t]_0^A + \int_0^A ts^{t-1}e^{-s}\, ds.$$
On obtient
$$\Gamma(t + 1) = \lim_{A\to+\infty} -A^t e^{-A} + \lim_{A\to+\infty} \int_0^A ts^{t-1}e^{-s}\, ds = t\int_0^{+\infty} s^{t-1}e^{-s}\, ds = t\Gamma(t).$$

4. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$ on a $\Gamma(n+1) = n!$.
   Pour $n = 0$ on a
   $$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1 = 0!.$$
   La propriété est donc vraie pour $n = 0$. Montrons que si elle est vraie pour un entier n alors elle l'est pour son successeur $n+1$. Soit n un entier. Supposons que la propriété est vraie au rang n c'est-à-dire que $\Gamma(n+1) = n!$. Alors d'après la question précédente on a $\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!$. Autrement dit la propriété est vraie au rang $n+1$. La propriété étant vraie au rang 0 et héréditaire elle est vraie pour tous les entiers.

Exercice 2. (*8 points*)
On note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ les tribus boréliennes sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu produit.

1. Rappeler les définitions de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Indication : on pourra procéder par double inclusion ; utiliser d'une part que tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est réunion dénombrable de produits d'intervalles ouverts, considérer d'autre part les ensembles du type $B \times \mathbb{R}$.
   La tribu borélienne est la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^2$:
   $$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma\{O \ / \ O \text{ ouvert de } \mathbb{R}^2\}.$$
   La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu engendrée par les pavés
   $$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\{A \times B \ / \ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$
   Tout ouvert est un réunion dénombrable de produits d'intervalles. Si O est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, il existe des suites (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) telles que
   $$O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left( ]a_n, b_n[\times]c_n, d_n[\right).$$
   Les intervalles étant des boréliens (éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) les ouverts apparaissent comme des réunions dénombrables de pavés. Comme une tribu est stable par réunion dénombrable on en déduit que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ contient l'ensemble des ouverts. La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ étant la plus petite tribu contenant l'ensemble des ouverts cela entraîne que
   $$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$
   Considérons l'ensemble
   $$\{A \times \mathbb{R} \ / \ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$
   C'est la tribu engendrée par la famille des ensembles $]a, b[\times \mathbb{R}$. Elle est donc contenue dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. De manière analogue l'ensemble
   $$\{\mathbb{R} \times B \ / \ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$
   est aussi une tribu incluse dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Une tribu est stable par intersection donc les ensembles
   $$(A \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} \times B) = A \times B$$
   appartiennent à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Autrement dit les pavés appartiennent à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Cela montre qu'on a
   $$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

2. Pour $E \subset \mathbb{R}^2$ on note
$$E_x = \{y \ / \ (x,y) \in E\} \text{ et } E^y = \{x \ / \ (x,y) \in E\}.$$
Montrer que si $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ alors, pour tout x, $E_x \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. La même chose est vraie pour les ensembles E^y (cela se démontre de la même façon ; on l'admet).
Vu en cours.
3. On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Rappeler ce qu'est un ensemble négligeable pour λ. On considère l'ensemble des parties
$$\mathcal{L}(\mathbb{R}) = \{B \cup N \ / B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), N \text{ négligeable}\}.$$
Montrer que $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ est une tribu (c'est la tribu complétée de la tribu borélienne pour la mesure de Lebesgue, appelée aussi tribu de Lebesgue).
Vu en cours.
4. On pourrait démontrer de la même façon que dans la question 2. que pour tout $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R})$, tous nombres réels x, y, E_x et E^y appartiennent à $\mathcal{L}(\mathbb{R})$. On l'admet. En déduire que si $A \times B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R})$ alors $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$.
Il suffit de décrire les tranches (ou sections) des produits $A \times B$:
$$(A \times B)_x = \emptyset \text{ si } x \notin A, \ B \text{ si } x \in A \ ;$$
$$(A \times B)^y = \emptyset \text{ si } y \notin B, \ A \text{ si } y \in B.$$
Si $A \times B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R})$, $(A \times B)_x$ et $(A \times B)^y$ appartiennent à $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ donc B et A appartiennent à $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.
5. Montrer que si N est une partie de $\mathbb{R}$ négligeable pour λ alors $N \times \mathbb{R}$ est négligeable pour la mesure produit $\lambda \otimes \lambda$. En utilisant la question 4., en déduire que $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R})$ n'est pas complète. On admettra qu'il existe des parties de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas dans $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.
La mesure d'un ensemble est égale à l'intégrale de son indicatrice. Le théoème de Fubini-Tonelli permet d'écrire :
$$\begin{aligned}
\lambda \otimes \lambda(N \times \mathbb{R}) &= \int_{\mathbb{R}^2} 1_{N \times \mathbb{R}}(x,y) \ (\lambda \otimes \lambda)(dx, dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_{N \times \mathbb{R}}(x,y) \lambda(dx) \right) \lambda(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lambda((N \times \mathbb{R})^y) \lambda(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} 0 \ \lambda(dy) \quad \text{car } N \text{ est négligeable} \\
&= 0.
\end{aligned}$$
Considérons maintenant une partie P de $\mathbb{R}$ qui ne soit pas dans $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ et N un ensemble négligeable. Alors comme
$$N \times P \subset N \times \mathbb{R}$$
et que $\lambda \otimes \lambda(N \times \mathbb{R}) = 0$, $N \times P$ est négligeable pour $\lambda \otimes \lambda$. Mais $N \times P$ n'appartient pas à $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R})$ car d'après la question précédente, si c'était le cas, N et P appartiendraient à $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ (ce qui est faux pour P par hypothèse).

Exercice 3. (*3 points*)
On se donne un ensemble X et une famille de fonctions $(f_i)_{i \in I}$ de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ (indexée par un ensemble I). On munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1. Donner un exemple de tribu sur X rendant mesurables toutes les fonctions f_i. Comment définir la plus petite tribu rendant mesurables toutes les fonctions f_i ?
   La tribu discrète $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ rend mesurables toutes les fonctions, en particulier les fonctions f_i. On peut définir la plus petite tribu rendant mesurables toutes les fonctions f_i comme l'intersection de toutes les tribus rendant mesurables toutes les fonctions f_i (intersection sur un ensemble non vide puisque $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une telle tribu).
2. On se place dans le cas où I n'a qu'un élément. On note $\sigma(f)$ la plus petite tribu sur X rendant f mesurable. Montrer que $\sigma(f) = f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer qu'une fonction g de X dans $\mathbb{R}$ est mesurable pour $\sigma(f)$ si et seulement s'il existe une fonction h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurable (pour la tribu borélienne) telle que $g = h \circ f$.
   La notation de l'énoncé est ambigüe. Il faut comprendre :
   $$f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \{f^{-1}(B) \;/\; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$
   Si f est mesurable pour une tribu $\mathcal{A}$ alors par définition, pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. On en déduit que
   $$f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subset \sigma(f).$$
   Mais par ailleurs $f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est une tribu sur X rendant f mesurable donc
   $$\sigma(f) \subset f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})).$$
   Si on a $g = h \circ f$ avec h une fonction borélienne (*i.e.* mesurable pour la tribu borélienne) alors pour tout borélien B de $\mathbb{R}$ on a
   $$g^{-1}(B) = f^{-1}(h^{-1}(B)) \in f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \text{ car } h^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$
   donc g est mesurable pour $\sigma(f) = f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
   Réciproquement supposons g mesurable pour $\sigma(f) = f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Soient x et y deux points de X. La fonction f prend la même valeur en x et y si
   $$y \in f^{-1}(f(x)).$$
   Comme g est mesurable pour $f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, il existe un borélien B_x tel que
   $$g^{-1}(\{g(x)\}) = f^{-1}(B_x).$$
   Le point x appartient à $g^{-1}(\{g(x)\})$ donc à $f^{-1}(B_x)$; on en déduit que $f(x) \in B_x$ donc que $f^{-1}(\{f(x)\}) \subset g^{-1}(\{g(x)\})$. On a donc montré l'implication suivante : si $f(x) = f(y)$ alors $g(x) = g(y)$. (On peut exprimer cette implication en terme de relation d'équivalence : définissons deux relations d'équivalence $x \sim_1 y$ si $f(x) = f(y)$, $x \sim_2 y$ si $g(x) = g(y)$; la partition en classes d'équivalence pour $\sim_1$ est plus fine que la partition en classes d'équivalence pour $\sim_2$.) Cela permet de définir une fonction h telle que $g = h \circ f$. Soit v un nombre réel. S'il existe $x \in X$ tel que $v = f(x)$ on pose $h(v) = g(x)$; cela a bien un sens (pour tout y tel que $v = f(y)$, $h(v) = g(y)$ affecte bien la même valeur à $h(v)$ car $v = f(x) = f(y)$ entraîne $g(x) = g(y)$). S'il n'existe pas de x dans X tel que $v = f(x)$ posons $h(v) = 0$. Par définition la fonction h ainsi définie vérifie $g(x) = h(f(x))$ pour tout x. Reste à voir qu'elle est borélienne. Considérons un intervalle $]a, b[$ qui ne contient pas 0. On a :
   $$h^{-1}(]a, b[) = \bigcup_{v \in]a,b[} h^{-1}(\{v\}).$$

Mais par définition de h on a $h^{-1}(\{v\}) = f(g^{-1}(\{v\}))$. On a donc :

$$h^{-1}(]a,b[) = \bigcup_{v\in]a,b[} f(g^{-1}(\{v\})) = f(g^{-1}(\bigcup_{v\in]a,b[} \{v\})) = f(g^{-1}(]a,b[)).$$

Comme par hypothèse g est mesurable pour $f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, il existe un borélien $C_{a,b}$ tel que $g^{-1}(]a,b[) = f^{-1}(C_{a,b})$. On a alors

$$h^{-1}(]a,b[) = f(g^{-1}(]a,b[)) = f(f^{-1}(C_{a,b}) = C_{a,b}.$$

Comme l'ensemble des intervalles $]a,b[$ qui ne contiennent pas 0 engendre la tribu borélienne, on en déduit que h est borélienne.

Exercice 4. (*7 points*)

1. Soit $a > 0$ un nombre réel. Démontrer que la fonction $(x,y) \mapsto e^{-xy^2}$ est intégrable sur $[0,a]\times[0,+\infty[$. On pourra calculer $\int_0^a e^{-xy^2}dx$ et montrer que c'est une fonction intégrable de y.
   La fonction $(x,y) \mapsto e^{-xy^2}$ est continue (donc mesurable pour la tribu borélienne) et positive. On peut appliquer le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\int_{[0,a]\times[0,+\infty[} e^{-xy^2}dxdy = \int_0^\infty \left(\int_0^a e^{-xy^2}dx\right) dy.$$

   On en déduit que si $y \mapsto \int_0^a e^{-xy^2}dx$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ alors

$$\int_{[0,a]\times[0,+\infty[} e^{-xy^2}dxdy < +\infty,$$

   autrement dit $(x,y) \mapsto e^{-xy^2}$ est intégrable sur $[0,a]\times[0,+\infty[$. Calculons $\int_0^a e^{-xy^2}dx$:

$$\int_0^a e^{-xy^2}dx = [\frac{e^{-xy^2}}{-y^2}]_0^a = \frac{1-e^{-ay^2}}{y^2}.$$

   La fonction $y \mapsto \frac{1-e^{-ay^2}}{y^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0, majorée par y^{-2} : elle est donc intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. Calculer l'intégrale $I(a,y) = \int_0^a e^{-xy^2}\sin(x)dx$.
   On peut faire le calcul en intégrant deux fois par parties. Une autre possibilité est d'utiliser les nombres complexes ($\Im$ désigne la partie imaginaire) :

$$I(a,y) = \int_0^a e^{-xy^2}\sin(x)dx = \int_0^a e^{-xy^2}\Im(e^{ix})dx = \Im\left(\int_0^a e^{-xy^2}e^{ix}dx\right).$$

$$\begin{aligned}\int_0^a e^{-xy^2}e^{ix}dx &= \int_0^a e^{(i-y^2)x}dx \\ &= [\frac{e^{(i-y^2)x}}{i-y^2}]_0^a \\ &= \frac{1-e^{(i-y^2)a}}{y^2-i}.\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} I(a,y) &= \Im\left(\frac{1-e^{(i-y^2)a}}{y^2-i}\right) = \Im\left(\frac{(1-e^{(i-y^2)a})(y^2+i)}{y^4+1}\right) \\ &= \frac{1-e^{-ay^2}\cos(a)-y^2e^{-ay^2}\sin(a)}{y^4+1}. \end{aligned}$$

3. Démontrer que, lorsque a tend vers $+\infty$, l'intégrale $\int_0^\infty I(a,y)dy$ tend vers l'intégrale $I = \int_0^\infty \frac{1}{1+y^4}dy$.

   Pour tout $y \geq 0$, on a

$$\lim_{a\to+\infty} \frac{1-e^{-ay^2}\cos(a)-y^2e^{-ay^2}\sin(a)}{y^4+1} = \frac{1}{y^4+1}.$$

   D'autre part, pour tout $a > 0$, on a

$$\frac{1-e^{-ay^2}\cos(a)-y^2e^{-ay^2}\sin(a)}{y^4+1} \leq \frac{2+y^2}{y^4+1},$$

   et la fonction $y \mapsto \frac{2+y^2}{y^4+1}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et indépendante de a. Le théorème de convergence dominée implique que

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^{+\infty} I(a,y)\,dy = \int_0^{+\infty}\lim_{a\to+\infty} I(a,y)\,dy = \int_0^{+\infty}\frac{1}{y^4+1}\,dy.$$

4. En déduire que l'intégrale $J = \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ est convergente.

   Pour tout (x,y) on a

$$|e^{-xy^2}\sin(x)| \leq e^{-xy^2}.$$

   Grâce à la question 1. on en déduit que la fonction (continue donc mesurable) $(x,y) \mapsto e^{-xy^2}\sin(x)$ est intégrable sur $[0,a]\times[0,+\infty[$. On peut appliquer le théorème de Fubini qui affirme l'intégrabilité sur $[0,a]$ de la fonction

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xy^2}\sin(x)\,dy$$

   et donne l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} I(a,y)\,dy = \int_0^a \left(\int_0^{+\infty} e^{-xy^2}\sin(x)\,dy\right)dx.$$

   On peut exprimer l'intégrale apparaissant dans le deuxième membre en faisant le changement de variable $u = \sqrt{x}y$. Cela donne

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy^2}\sin(x)\,dy = \sin(x)\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\frac{du}{\sqrt{x}} = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du.$$

   On a donc l'égalité

$$\int_0^a \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du\,dx = \left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du\right)\int_0^a \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^{+\infty} I(a,y)\,dy,$$

ce qu'on peut encore écrire

$$\int_0^a \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\ dx = \frac{\int_0^{+\infty} I(a,y)\ dy}{\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\ du}.$$

Grâce à la question 3. on en déduit

$$\int_0^a \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\ dx \to_{a\to+\infty} \frac{\int_0^{+\infty} \frac{1}{y^4+1}\ dy}{\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\ du}.$$

C'est exactement dire que l'intégrale $J = \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ est convergente.

5. Connaissant la valeur de l'intégrale $K = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, calculer les valeurs de I et J. Indication : I se calcule en décomposant la fraction rationnelle en éléments simples. Le calcul complet est long. Si vous n'avez pas le temps de le faire, expliquez comment il faut procéder et quels types d'expressions on obtient.
La question précédente donne l'égalité

$$I = JK = J\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Reste à calculer I ; J s'en déduit. Nous allons calculer une primitive de la fraction rationnelle $\frac{1}{1+x^4}$. Pour cela commençons par écrire la décomposition en éléments simples de la fraction. Les racines du polynôme x^4+1 sont $\exp(i\pi/4)$, $\exp(3i\pi/4)$, $\exp(-i\pi/4)$, $\exp(-3i\pi/4)$. La décomposition de la fraction rationnelle dans $\mathbb{C}(X)$ a la forme suivante :

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{\alpha}{x-\exp(i\pi/4)} + \frac{\beta}{x-\exp(-i\pi/4)} + \frac{\gamma}{x-\exp(3i\pi/4)} + \frac{\delta}{x-\exp(-3i\pi/4)}.$$

En prenant la quantité conjuguée, comme la décomposition en éléments simples est unique, on obtient les relations :

$$\beta = \overline{\alpha},\ \ \delta = \overline{\gamma}.$$

En multipliant par $x - \exp(i\pi/4)$ et en évaluant en $x = \exp(i\pi/4)$, on obtient

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{(\exp(i\pi/4)-\exp(-i\pi/4))(\exp(i\pi/4)-\exp(3i\pi/4))(\exp(i\pi/4)-\exp(-3i\pi/4))}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}i\sqrt{2}\sqrt{2}(1+i)} = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}}\end{aligned}$$

De la même façon on obtient :

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{(\exp(3i\pi/4)-\exp(i\pi/4))(\exp(3i\pi/4)-\exp(-i\pi/4))(\exp(3i\pi/4)-\exp(-3i\pi/4))}\\ &= \frac{1}{-\sqrt{2}\sqrt{2}(-1+i)\sqrt{2}i} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Cela donne l'écriture suivante

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{-1-i}{x-\exp(i\pi/4)} + \frac{-1+i}{x-\exp(-i\pi/4)} + \frac{1-i}{x-\exp(3i\pi/4)} + \frac{1+i}{x-\exp(-3i\pi/4)}\right),$$

puis (en regroupant les pôles conjugués)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x^4} &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{(-1-i)(x-\exp(-i\pi/4))+(-1+i)((x-\exp(i\pi/4)))}{(x-\exp(i\pi/4))(x-\exp(-i\pi/4))} \\
&\quad+\frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{(1-i)(x-\exp(-3i\pi/4))+(1+i)((x-\exp(3i\pi/4)))}{(x-\exp(3i\pi/4))(x-\exp(-3i\pi/4))} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{-2x+2\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{2x+2\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right)
\end{aligned}$$

Remarque : il n'est pas sÃ»r que le calcul précédent soit le plus simple. On peut aussi utiliser l'écriture $x^4+1=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$ et chercher la décomposition en éléments simples qui a la forme précédente. Une fois ce travail fait, la recherche de primitive n'est plus très difficile :

$$\begin{aligned}
\int \frac{-2x+2\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx &= \int \frac{-2x+\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx + \int \frac{\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx \\
&= -\ln(x^2-\sqrt{2}x+1)+\int \frac{\sqrt{2}}{(x-\sqrt{2}/2)^2+1/2}\,dx \\
&= -\ln(x^2-\sqrt{2}x+1)+\int \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2}x-1)^2+1}\,dx \\
&= -\ln(x^2-\sqrt{2}x+1)+2\arctan(\sqrt{2}x-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+2\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx &= \int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx + \int \frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx \\
&= \ln(x^2+\sqrt{2}x+1)+\int \frac{\sqrt{2}}{(x+\sqrt{2}/2)^2+1/2}\,dx \\
&= \ln(x^2+\sqrt{2}x+1)+2\arctan(\sqrt{2}x+1)
\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x-1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x+1)$$

On en déduit la valeur de I :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}\,dx \\
&= \left[\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)\right]_0^{+\infty}+\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x-1)\right]_0^{+\infty}+\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x+1)\right]_0^{+\infty} \\
&= 0+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{-\pi}{4}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$I=\frac{\pi}{2\sqrt{2}},\quad J=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}.$$