Théorème : Soient $p \in [1,+\infty[$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et (φ_k) une identité approchée.

$$\varphi_k * f \xrightarrow[k\to+\infty]{L^p} f$$

Démonstration : On veut montrer que $\|\varphi_k * f - f\|_p \to 0$

$$f*\varphi_k(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\varphi_k(y)\,dy - f(x)\int_{\mathbb{R}^d}\varphi_k(y)\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \big(f(x-y)-f(x)\big)\varphi_k(y)\,dy.$$

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} \big(f(x-y)-f(x)\big)\varphi_k^{1/p}(y)\;\varphi_k^{1/q}(y)\,dy$$

$$|f*\varphi_k(x)-f(x)| \underset{\text{Hölder}}{\leq} \left\|\big(f(x-\cdot)-f(x)\big)\varphi_k^{1/p}\right\|_p \left\|\varphi_k^{1/q}\right\|_q \quad (*)$$

$$\|\varphi_k^{1/q}\|_q^q = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\varphi_k^{1/q}\right)^q(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d}\varphi_k(y)\,dy = 1$$

$$\left\|\big(f(x-\cdot)-f(x)\big)\varphi_k^{1/p}\right\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)-f(x)|^p\varphi_k(y)\,dy.$$

(*) devient

$$\left|f*\varphi_k(x)-f(x)\right|^p \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left|f(x-y)-f(x)\right|^p \varphi_k(y)\, dy.$$

Calculons maintenant $\|f*\varphi_k - f\|_p^p$

$$\|f*\varphi_k - f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} \left|f*\varphi_k(x)-f(x)\right|^p dy$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \left|f(x-y)-f(x)\right|^p \varphi_k(y)\, dy\right) dx$$

$$\underset{\text{Fubini-Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \left|f(x-y)-f(x)\right|^p \varphi_k(y)\, dx\right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_k(y)\, \|f(\cdot-y)-f\|_p^p\, dy. \qquad (**)$$

L'opérateur de translation $f \longmapsto f(\cdot-y)$ est uniformément continu de $L^p(\mathbb{R}^d)$ dans lui même.

Soit $\varepsilon>0$. Soit $\eta>0$ tq si $\|y\|<\eta$ alors

$$\|f(\cdot-y)-f\|_p < \varepsilon. \qquad B(0,\eta)=\{y/\ \|y\|<\eta\}.$$

De (**) on tire

$$\|f*\varphi_k - f\|_p^p \leq \int_{B(0,\eta)} \varphi_k(y)\, \|f(\cdot-y)-f\|_p^p\, dy + \int_{{}^cB(0,\eta)} \varphi_k(y)\, \|f(\cdot-y)-f\|_p^p\, dy.$$

On a choisi $\eta>0$ tq si $\|y\|<\eta$ alors $\|f(\cdot-y)-f\|_p<\varepsilon$

On en déduit que

$$\int_{B(0,\eta)} \varphi_k(y)\,\|f(\cdot-y)-f\|_p^p\,dy \leq \varepsilon^p \int_{B(0,\eta)} \varphi_k(y)\,dy \underset{\text{car } \varphi_k\geqslant 0}{\leq} \varepsilon^p \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_k(y)\,dy}_{=1} = \varepsilon^p$$

D'autre part l'inégalité triangulaire donne

$$\|f(\cdot-y)-f\|_p \leq 2\|f\|_p$$

On a donc

$$\int_{^cB(0,\eta)} \varphi_k(y)\,\|f(\cdot-y)-f\|_p^p\,dy \leq 2^p\|f\|_p^p \int_{^cB(0,\eta)} \varphi_k(y)\,dy$$

On a montré :

$$\|f*\varphi_k-f\|_p^p \leq \varepsilon^p + 2^p\|f\|_p^p \int_{^cB(0,\eta)} \varphi_k(y)\,dy.$$

Comme (φ_k) est une identité approchée $\displaystyle\int_{^cB(0,\eta)} \varphi_k(y)\,dy \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Il existe $K>0$ tq si $k\geqslant K$ alors $\|f*\varphi_k-f\|_p^p \leq 2\varepsilon^p$.

soit $\|f*\varphi_k-f\|_p \leq 2^{1/p}\varepsilon$.

cqfd